§ 79. Предварительные замечания о релятивистских эффектах. Зависимость массы от скорости

Основные идеи и заключения теории относительности были пояснены в § 5 и 6. Обычно считается, что более подробное пояснение релятивистских эффектов выходит за рамки общего курса физики. Однако вследствие значения, которое некоторые релятивистские эффекты имеют в ядерной физике, и познавательного интереса всех выводов теории относительности полезно рассмотреть связь релятивистских эффектов с законом пропорциональности массы и энергии. При этом обнаруживается, что очень многие релятивистские эффекты могут быть выведены из закона пропорциональности массы и энергии (в сочетании с другими законами сохранения) и к тому же могут быть выведены совершенно элементарно, что для некоторых из них недостижимо при обычном изложении теории относительности. Такой вывод релятивистских эффектов дан ниже (§ 79 и 81—84) [1].

Согласно закону $m = \frac{E}{c^2}$ только очень большим величинам энергии соответствует заметная масса. В связи с этим только для очень больших скоростей и больших значений потенциальной энергии проявляются отступления от формул классической механики и электродинамики. Релятивистские эффекты, в сущности, и представляют собой соотношения, уточняющие формулы классической механики и электродинамики для движений со скоростями порядка скорости света и для весьма больших значений потенциальной энергии, например для значений гравитационного потенциала, соизмеримых с величиной квадрата скорости света.

Вывод зависимости массы от скорости и формул для кинетической энергии из закона $E = mc^2$. При увеличении скорости движения какого-либо тела или частицы масса этого тела или частицы возрастает на величину прироста кинетической энергии, отнесенного к квадрату скорости света. Этим объясняется зависимость массы электрона от скорости, установленная экспериментально и определяемая уравнением Лорентца — Эйнштейна (т. II, § 77).

Действительно, пусть частица с массой m, находящаяся под действием силы $F = \frac{d(mv)}{dt}$, получает на пути ds вследствие ускорения приращение кинетической энергии

$$dE_{\text{кин}} = F\,ds = \frac{d(mv)}{dt}ds = \frac{ds}{dt}\,d(mv) = v\,d(mv).$$

По закону пропорциональности массы и энергии прирост кинетической энергии должен повлечь за собой пропорциональное увеличение массы частицы:

$$dE_{\text{кин}} = c^2\,dm.$$

Сопоставляя эти два уравнения для $dE_{\text{кин}}$, получаем:

$$c^2 dm = v\,d(mv) = v^2\,dm + mv\,dv;$$

[1]) Этот метод был развит К. Путиловым в 1932—1944 гг. [кроме вывода формулы (5), который предложен Льюисом в 1908 г.]. Трактовка релятивистских эффектов на основе закона пропорциональности массы и энергии, по мнению автора, представляет не только методический, но также и методологический интерес. В учебном отношении важно понимание релятивистских формул (при любом способе их вывода).

отсюда

$$\frac{dm}{m}=\frac{v\,dv}{c^2-v^2}.$$

Замечая, что в обеих частях уравнения мы имеем дифференциал натурального логарифма, интегрируем уравнение от $v=0$ до v и соответственно от m_0 до m; получается уравнение Лорентца—Эйнштейна, обобщенное на любую частицу (независимо от того, несет ли частица электрический заряд или является нейтральной):

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{5}$$

Принимая во внимание зависимость массы от скорости, нетрудно убедиться в том, что обычное выражение для кинетической энергии $E=\frac{mv^2}{2}$ должно быть заменено более точным:

$$E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

Действительно, если m_0 есть масса покоящейся частицы или тела, а m — масса той же частицы или тела при скорости v, то согласно формуле (1)

$$E_{\text{кин}}=(m-m_0)\,c^2. \tag{а}$$

Из уравнения (5), если возвести обе его части в квадрат, имеем:

$$m^2c^2-m^2v^2=m_0^2c^2,$$

откуда

$$m^2v^2=(m^2-m_0^2)\,c^2=(m-m_0)\,(m+m_0)\,c^2;$$

следовательно,

$$m-m_0=\frac{mv^2}{1+\frac{m_0}{m}}\,\frac{1}{c^2}. \tag{б}$$

Подставляя выражение (б) в формулу (а) и заменяя отношение $\frac{m_0}{m}$ из (5), получаем (6).

При малых скоростях движения (когда $v\ll c$) уточненная формула для кинетической энергии (6) совпадает с обычным выражением кинетической энергии $E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{2}$. При скоростях движения, приближающихся к скорости света, кинетическая энергия стремится к величине mv^2, где m — масса движущейся частицы, возрастающая при увеличении скорости согласно формуле (5). Достижение предела $v=c$ возможно только для частиц, не обладающих массой покоя ($m_0=0$), т. е. для фотонов, энергия движения которых согласно (6) и в полном соответствии с законом $mc^2=E$ оказывается равной mc^2.

Решая уравнение (5) относительно v, получаем:

$$v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}.$$

Мы видим, что для фотонов, у которых масса покоя $m_0=0$, скорость перемещения энергии и массы (групповая скорость волн в вакууме) всегда равна c. Кинетическая энергия частицы может быть представлена также формулой:

$$E_{\text{кин}}=(m-m_0)c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right). \tag{7}$$

Часто полную энергию выражают через импульс частицы $p=mv$. Из соотношения (5) следует:

$$m^2c^2-m^2v^2=m_0^2c^2 \text{ или } m^2c^4=p^2c^2+m_0^2c^4,$$

т. е.

$$mc^2=E=\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4}. \tag{8}$$

Согласно формуле (5) прирост массы быстро движущейся частицы (как заряженной, так и нейтральной) при скоростях порядка $^1/_{10}$ скорости света приблизительно пропорционален квадрату отношения скорости частицы к скорости света:

$$\text{при } \frac{v}{c}\ll 1 \quad \frac{m-m_0}{m_0}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\ldots$$

Чем ближе скорость движения к скорости света, тем быстрее происходит возрастание массы. В помещенной ниже таблице приведены отношения прироста массы к массе покоя для скоростей, близких к скорости света, и значения кинетической энергии электрона и протона, выраженные в миллионах электроновольт.

Зависимость прироста массы и кинетической энергии электрона и протона от скорости (при скоростях, близких к скорости света)

$\frac{v}{c}$	$\frac{m-m_0}{m_0}$	$(m-m_0)c^2$ в *Мэв*	
		для электрона	для протона
0,7	0,400	0,2044	373,47
0,8	0,667	0,3404	625,02
0,9	1,294	0,6609	1215,0
0,92	1,552	0,7923	1454,8
0,94	1,931	0,9861	1810,6
0,96	2,571	1,313	2410,8
0,98	4,025	2,056	3775,0
0,99	6,089	3,109	5708,5
0,995	9,0125	4,602	8449,9
0,999	21,366	10,91	20032