§ 81. Вывод закона Эйнштейна сложения скоростей из закона пропорциональности массы и энергии и законов сохранения энергии или количества движения[1])

Анализируя движение материальной точки неизменяемой массы и руководствуясь предположением, что измерение пути перемещения и промежутков времени не зависит от состояния движения (что до появления теории относительности считалось самоочевидным), мы приходим к галилееву закону сложения скоростей (т. I, § 6, 1959 г.; в пред. изд. § 9): $v=u+w$.

Но в случае весьма больших скоростей, порядка скорости света, нельзя игнорировать возрастание массы при увеличении скорости движения. Из формулы (5) следует, что ни при каких обстоятельствах скорость движения не может превысить скорость света, так как при $v\to c$ и $m_0\neq 0$ будет $m\to\infty$. Это показывает, что для больших скоростей галилеев закон сложения скоростей нуждается в уточнении.

Точный закон сложения скоростей (закон Эйнштейна) получается при совмещении закона пропорциональности массы и энергии с законом сохранения количества движения.

Представим себе, что в системе координат K, которую мы считаем условно неподвижной, происходит разрыв снаряда, имевшего массу покоя (M_0+m_0), на две части M и m, движущиеся в противоположные стороны: первая (M) со скоростью u по оси x налево, вторая (m) со скоростью w направо. Количество движения снаряда при его разрыве не изменяется и геометрически остается равным нулю; поэтому

$$\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}u=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}w. \tag{а}$$

Если учесть массу, присущую энергии взрывчатого вещества («энергии взрыва» E), то можно утверждать, что и масса при взрыве не изменяется:

$$M_0+m_0+\frac{E}{c^2}=\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}=M^*, \tag{б}$$

Представим себе теперь, что еще до разрыва мы сообщили снаряду скорость u в направлении оси x направо, т. е. сообщили снаряду количество движения

$$G=\frac{M^*}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}u.$$

---

[1]) Обоснование закона Эйнштейна сложения скоростей, которое обычно приводится в курсах физики, пояснено (для случая движения по одной прямой) в § 5.

Тогда после разрыва осколок M окажется покоящимся относительно системы координат K и количество движения, не изменяющееся при взрыве, будет равно

$$G=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v=\frac{M^*}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}u, \tag{в}$$

где v — скорость осколка m по отношению к M, т. е. результирующая скоростей u и w.

Учитывая, что по уравнению (а)

$$\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\frac{w}{u},$$

получаем согласно (б)

$$M^*=\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}\left(\frac{w}{u}+1\right).$$

Подставляя это выражение для M^* в (в), находим:

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m_0(u+w)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}. \tag{12}$$

Сокращая это уравнение на m_0 и решая его относительно v, приходим [1]) к закону Эйнштейна сложения скоростей:

$$v=\frac{u+w}{1+\frac{wu}{c^2}}. \tag{13}$$

По этому закону сложения скоростей, уточняющему закон Галилея, получается, что как бы ни были близки к c скорости u и w, их сумма не превышает скорости c [при $u\to c$ и $w\to c$ знаменатель в формуле (13) становится равным двум и результирующая скорость $v\to c$].

---

[1]) Из (12) получаем:

$$\left(\frac{u+w}{v}\right)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right),$$

или

$$\left(\frac{u+w}{v}\right)^2-\frac{u^2}{c^2}-\frac{2uw}{c^2}-\frac{w^2}{c^2}=1-\frac{w^2}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}+\left(\frac{wu}{c^2}\right)^2$$

откуда

$$\left(\frac{u+w}{v}\right)^2=1+\frac{2uw}{c^2}+\left(\frac{wu}{c^2}\right)^2=\left(1+\frac{wu}{c^2}\right)^2,$$

что совпадает с (13).

Заметим, что уравнение (12) можно также рассматривать как двоякую запись количества движения тела с массой покоя m_0: поскольку тело движется в системе координат K со скоростью v, то его количество движения равно $m_v v$, где $m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; если же это движение рассматривать как сочетание переносного движения со скоростью u и относительного движения со скоростью w, то нужно считать, что, участвуя в переносном движении, тело обладает количеством движения $m_{w,u}u$, а вследствие относительного движения оно приобретает еще количество движения $m_{w,u}w$, где

$$m_{w,u} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{w^2}{c^2}}}. \tag{14}$$

Таким образом,

$$m_v v = m_{w,u}(w+u), \tag{15}$$

что совпадает с уравнением (12).

Нетрудно обобщить вывод закона сложения скоростей на случай, когда относительная скорость w направлена под некоторым углом, отличающимся от нуля, к переносной скорости u. Если в системе координат K' угол между скоростями w и u равен θ', то составляющая количества движения тела в направлении скорости u равна $G_{\parallel} = m_{w,u}(u + w\cos\theta')$, а в направлении, перпендикулярном к u, составляющая количества движения равна $G_{\perp} = m_w w \sin\theta'$ (так как переносного движения в этом направлении нет). Обозначим угол между результирующей скоростью v и направлением u через θ. Тогда те же величины проекций количества движения на направление u и перпендикулярное к u можно определить как $G_{\parallel} = m_v v\cos\theta$ и $G_{\perp} = m_v v \sin\theta$. Таким образом,

$$m_v v\cos\theta = m_{w,u}(u + w\cos\theta') \tag{г}$$

и

$$m_v v\sin\theta = m_w w\sin\theta'. \tag{д}$$

Разделив уравнение (д) на (г) и учитывая, что

$$\frac{m_w}{m_{w,u}} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

находим:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{w\sin\theta'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{u + w\cos\theta'}. \tag{16}$$

Возведя в квадрат уравнения (г) и (д) и складывая их, получаем эйнштейнов закон сложения скоростей, составляющих угол

θ' друг с другом [1]):

$$v^2=\frac{u^2+w^2+2uw\cos\theta'-\frac{u^2w^2}{c^2}\sin^2\theta'}{\left(1+\frac{uw\cos\theta'}{c^2}\right)^2}. \qquad (17)$$

Легко видеть, что эта формула при $\theta'=0$ совпадает с (13).

В курсах теоретической физики показывается, что закон сложения скоростей Эйнштейна полностью объясняет (без каких-либо дополнительных предложений) отрицательный результат опытов Майкельсона (§ 4), результаты опытов Физо по определению скорости света в движущихся средах (§ 3) и т. д.

§ 82. Две трактовки закона пропорциональности массы и энергии и уточнение закона тяготения

По теории Эйнштейна, гравитационное поле представляет собой проявление особых свойств пространства, которое, как предполагается, тем существеннее отличается от евклидова пространства, чем больше масса близрасположенных тел. Согласно этим представлениям, развитым в общей теории относительности, все величины, характеризующие гравитационное поле (напряженность, потенциал, энергия тяготения), имеют только геометрический смысл, в отличие от аналогичных величин, характеризующих электромагнитное поле. Придерживаясь указанной концепции, величину E в законе пропорциональности массы и энергии нужно понимать как совокупность всех видов энергии, *кроме энергии тяготения*. В соответствии с этим тогда и масса тела, перемещаемого без ускорения в гравитационном поле, считается неизменяющейся.

Но допустима (т. е. не приводит ни к каким противоречиям, а, напротив, во многих случаях оказывается даже более удобной) иная трактовка закона пропор-

---

[1]) Возведя в квадрат и складывая уравнения (д) и (г), получаем:

$$m_v^2v^2=m_{w,u}^2(u^2+w^2\cos^2\theta'+2uw\cos\theta')+m_w^2w^2\sin^2\theta',$$

или, учитывая, что $\left(\frac{m_w}{m_{w,u}}\right)^2=1-\frac{u^2}{c^2}$:

$$\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{A}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)},$$

где

$$A=u^2+w^2+2uw\cos\theta'-\frac{u^2w^2}{c^2}\sin^2\theta'.$$

Следовательно,

$$v^2=\frac{A}{\frac{A}{c^2}+\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)}.$$

Знаменатель правой части этого выражения, как нетрудно убедиться, представляет собой квадрат величины

$$\left(1+\frac{uw\cos\theta'}{c^2}\right).$$