θ' друг с другом [1]):

$$v^2=\frac{u^2+w^2+2uw\cos\theta'-\frac{u^2w^2}{c^2}\sin^2\theta'}{\left(1+\frac{uw\cos\theta'}{c^2}\right)^2}. \qquad (17)$$

Легко видеть, что эта формула при $\theta'=0$ совпадает с (13).

В курсах теоретической физики показывается, что закон сложения скоростей Эйнштейна полностью объясняет (без каких-либо дополнительных предложений) отрицательный результат опытов Майкельсона (§ 4), результаты опытов Физо по определению скорости света в движущихся средах (§ 3) и т. д.

§ 82. Две трактовки закона пропорциональности массы и энергии и уточнение закона тяготения

По теории Эйнштейна, гравитационное поле представляет собой проявление особых свойств пространства, которое, как предполагается, тем существеннее отличается от евклидова пространства, чем больше масса близрасположенных тел. Согласно этим представлениям, развитым в общей теории относительности, все величины, характеризующие гравитационное поле (напряженность, потенциал, энергия тяготения), имеют только геометрический смысл, в отличие от аналогичных величин, характеризующих электромагнитное поле. Придерживаясь указанной концепции, величину E в законе пропорциональности массы и энергии нужно понимать как совокупность всех видов энергии, *кроме энергии тяготения*. В соответствии с этим тогда и масса тела, перемещаемого без ускорения в гравитационном поле, считается неизменяющейся.

Но допустима (т. е. не приводит ни к каким противоречиям, а, напротив, во многих случаях оказывается даже более удобной) иная трактовка закона пропор-

---

[1]) Возведя в квадрат и складывая уравнения (д) и (г), получаем:

$$m_v^2v^2=m_{w,u}^2(u^2+w^2\cos^2\theta'+2uw\cos\theta')+m_w^2w^2\sin^2\theta',$$

или, учитывая, что $\left(\frac{m_w}{m_{w,u}}\right)^2=1-\frac{u^2}{c^2}$:

$$\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{A}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)},$$

где

$$A=u^2+w^2+2uw\cos\theta'-\frac{u^2w^2}{c^2}\sin^2\theta'.$$

Следовательно,

$$v^2=\frac{A}{\frac{A}{c^2}+\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)}.$$

Знаменатель правой части этого выражения, как нетрудно убедиться, представляет собой квадрат величины

$$\left(1+\frac{uw\cos\theta'}{c^2}\right).$$

циональности массы и энергии, а именно трактовка этого закона как совершенно универсального, охватывающего все виды энергии, *включая и энергию тяготения.* При такой трактовке закона $E=mc^2$ нужно учитывать гравитационное изменение Δm массы тела, определяемое соотношением $\Delta mc^2=m\varphi$, где φ— потенциал тяготения и $m\varphi$ — потенциальная энергия тяготения.

Действительно, если m^0 — масса тела при $\varphi=0$ и E^0— энергия тела без учета потенциальной энергии тяготения, а m — масса того же тела (при той же его скорости и при тех же значениях других параметров его состояния), когда оно находится в поле тяготения в месте, где потенциал равен φ, и E — полная энергия этого тела с учетом потенциальной энергии тяготения, то из разности соотношений $m^0c^2=E^0$ и $mc^2=E$ получаем $(m-m^0)c^2=E-E^0$ или, что то же,

$$(m-m^0)\,c^2=m\varphi. \tag{18}$$

Поскольку потенциал тяготения отрицателен ($\varphi<0$), т. е. поскольку для удаления тела из гравитационного поля (без изменения скорости тела) к телу должна быть подведена энергия, а с ней и соответствующая масса, то $m^0>m$, т. е. масса тела m^0 вне поля тяготения больше, чем масса того же тела при потенциале тяготения φ. Для зависимости массы от потенциала поля из (18) получаем:

$$m=\frac{m^0}{1-\frac{\varphi}{c^2}}. \tag{18'}$$

Потенциальную энергию взаимодействия двух тел мы представляем себе как величину взаимную, относящуюся к обоим взаимодействующим телам. Однако, рассматривая смещение двух взаимодействующих тел относительно их общего центра масс, можно расчленить энергию взаимодействия на части, каждая из которых сопряжена с одним из взаимодействующих тел. Действительно, представим себе, что сила взаимного тяготения тел преодолевается едва превышающей ее силой отталкивания, изменяющейся с расстоянием по тому же закону, что и сила тяготения. Работа, производимая этой силой отталкивания при удалении тел на бесконечно большое расстояние друг от друга, численно равна интересующей нас потенциальной энергии. Ускорения, приобретаемые телами, обратно пропорциональны массам тел, поэтому и пути, проходимые телами за любой промежуток времени, будут тоже обратно пропорциональны массам тел. Но так как в любой момент времени силы, заставляющие тела удаляться друг от друга, равны, то, стало быть, и работы, производимые этими силами, будут также обратно пропорциональны массам тел: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{m_2}{m_1}$. Отсюда

$$A_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}(A_1+A_2) \quad \text{и} \quad A_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}(A_1+A_2).$$

Сумма указанных работ (A_1+A_2), взятая с обратным знаком, равна потенциальной энергии взаимодействия рассматриваемых тел. Мы видим, таким образом, что энергия взаимодействия двух тел слагается из двух частей, физически сопряженных с каждым из взаимодействующих тел и пропорциональных отношению массы д р у г о г о тела к сумме масс.

В частном случае, когда масса одного тела крайне мала в сравнении с массой другого тела, почти вся энергия взаимодействия должна считаться присущей телу с малой массой.

Учитывая сказанное, рассмотрим, как должен быть записан ньютонов закон тяготения, чтобы он в явной форме представлял изменение силы тяготения в зависимости от расстояния.

Согласно ньютонову закону тяготения потенциальная энергия тела малой массы m в гравитационном радиальном поле, создаваемом телом большой массы M, равна

$$U = -K\frac{Mm}{r},$$

где r — расстояние m от центра массы тела M и K — гравитационная постоянная, равная в абсолютной системе единиц $6{,}67 \cdot 10^{-8}$.

При перемещении тела в гравитационном поле масса тела изменяется по закону

$$m = \frac{m^0}{1 - \frac{\varphi}{c^2}},$$

где $\varphi = -\frac{KM}{r}$; поэтому

$$U = -K\frac{Mm^0}{r\left(1 + \frac{KM}{rc^2}\right)},$$

или при $\frac{KM}{r} \ll c^2$

$$U \approx -K\frac{Mm^0}{r}\left(1 - \frac{KM}{rc^2}\right).$$

Следовательно, сила тяготения

$$f = -\frac{\partial U}{\partial r} \approx K\frac{Mm^0}{r^2}\left(1 - 2\frac{KM}{rc^2}\right). \tag{19}$$

В геометрической теории тяготения, развитой Эйнштейном и составляющей сущность общей теории относительности, не приходится рассматривать энергию и силу тяготения, и в соответствии с этим масса тела, перемещающегося в гравитационном поле, считается неизменной (если, разумеется, неизменна скорость). Для величины, соответствующей ускорению в поле тяготения $g = \frac{f}{m^0}$, Эйнштейном была получена (в 1915 г.) формула, которая, несмотря на различие трактовок, может быть выведена, что легко видеть, из формулы (19):

$$g \approx K\frac{M}{r^2}\left(1 - 2\frac{\alpha}{r}\right), \tag{19'}$$

где $\alpha = \frac{KM}{c^2}$. Эту величину α, имеющую размерность длины, называют *гравитационным радиусом* массы M. Гравитационный радиус точечной массы, равной массе Солнца, составляет 1,47 *км*, Земли — около 5 *мм*.

Вычислим ускорение, создаваемое гравитационным полем электрона. В этом случае нужно учесть, что масса электрона полностью или частично обусловлена его электрическим полем и поэтому должна считаться распределенной в пространстве с плотностью $\frac{e^2}{8\pi r^4}\frac{1}{c^2}$ (т. II, § 77). Внутри сферического слоя, между поверхностью электрона, имеющего радиус a, и сферой радиуса r, заключена масса m_r:

$$m_r = \frac{e^2}{8\pi c^2}\int\limits_a^r \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{e^2}{2c^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) = m_0\left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

где $m_0 = \frac{e^2}{2ac^2}$ (m_0 — полная масса покоя электрона), Потенциал тяготения, создаваемый массой, равномерно распределенной вне сферы радиуса r, всюду внутри этой сферы постоянен (т. I, § 33, 1959 г.; в пред. изд. § 39).

Подставляя значение m_r в формулу (19) или (19′) вместо M, находим, что отклонение гравитационного поля электрона от обычного ньютонова выражения определяется формулой

$$\frac{g}{\frac{Km_r}{r^2}} = 1 - 2\frac{Km_r}{rc^2} = 1 - 2\frac{\alpha}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\right),$$

где α — гравитационный радиус электрона

$$\left(\alpha = \frac{Km_0}{c^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-28}}{9\cdot 10^{20}} \approx 7\cdot 10^{-56}\,см\right).$$

Учитывая, что классический электромагнитный радиус электрона $a = \frac{e^2}{2m_0c^2}$, предыдущую формулу можно переписать так:

$$\frac{g}{\frac{Km_r}{r^2}} = 1 - \frac{2Km_0}{c^2r} + \frac{Ke^2}{c^4r^2}. \tag{20}$$

Это уравнение (при его трактовке, принятой в общей теории относительности) в точности совпадает с уравнением, которое было получено Шварцшильдом.

§ 83. Красное смещение спектральных линий. Поперечный эффект Доплера

Фотон частоты ν^*, обладая массой $\frac{h\nu^*}{c^2}$, имеет в поле тяготения потенциальную энергию $\frac{h\nu^*}{c^2}\varphi$. При движении фотона в вакууме полная энергия фотона (т. е. сумма его электромагнитной и гравитационной энергии) остается постоянной. Но так как потенциальная энергия тяготения отрицательна, то электромагнитная энергия фотона, а стало быть, и частота при удалении фотона от масс, образующих поле тяготения, должны уменьшаться, как уменьшается кинетическая энергия камня, брошенного вверх. По закону сохранения энергии

$$h\nu^* + \frac{h\nu^*}{c^2}\varphi = h\nu_0^* + \frac{h\nu_0^*}{c^2}\varphi_0;$$

следовательно, уменьшение частоты фотона, вызываемое преодолением поля тяготения, т. е. смещение спектральных линий в сторону более длинных волн, при $\left|\frac{\varphi_0}{c^2}\right| \ll 1$ определяется формулой

$$\frac{\nu^* - \nu_0^*}{\nu^*} \approx \frac{\varphi_0 - \varphi}{c^2}. \tag{21}$$

В общей теории относительности, как уже упоминалось, не приходится рассматривать энергию гравитации, так как тяготение трактуется как проявление вблизи массивных тел особых свойств пространства («искривления пространства»). В соответствии с этим в общей теории относительности частота фотона, движущегося в гравитационном поле, считается неизменной. Это не противоречит формуле (21), так как, согласно общей теории относительности, ход часов («время») в поле тяготения замедлен, т. е. длительность любого интервала времени (например, 1 *сек*) является в поле тяготения увеличенной и как раз пропорционально правой