ГЛАВА I

ТЕНЗОРЫ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы подойдем к понятию тензора в наиболее простом и элементарном случае, а именно, рассматривая обычное пространство и притом в прямоугольных декартовых координатах. Мы покажем важнейшие применения понятия тензора в гидродинамике и теории упругости. Таким образом, эта глава по отношению ко всей книге будет носить вводный характер, но в то же время представлять собой в известном смысле законченное целое. Читатель, желающий получить лишь простейшее понятие о тензорах и их приложениях, может ограничиться даже одной этой главой. Напротив, читателю, математически хорошо развитому и желающему серьезно изучить книгу, возможно, будет достаточно лишь просмотреть эту главу, так как дальнейшее изложение на ее результаты не опирается и использует их лишь в качестве иллюстраций.

§ 1. Одновалентные тензоры

На протяжении главы I мы будем рассматривать (не оговаривая этого каждый раз отдельно) исключительно прямоугольные декартовы координаты (в обычном пространстве).

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — *орты*, положенные в основу нашей координатной системы (рис. 1). Совокупность ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, отложенных из начала O, мы будем называть *ортогональным репером*. Составим скалярные произведения ортов:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{1.1}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{x}$, отложенный для простоты из начала O. Как известно, координаты вектора $\mathbf{x}$ (которые мы будем обозначать x_1, x_2, x_3) можно определить как коэффициенты разложения

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

и, что означает то же самое, как проекции вектора **x** на оси:

$$x_1 = \mathbf{x}\mathbf{e}_1, \quad x_2 = \mathbf{x}\mathbf{e}_2, \quad x_3 = \mathbf{x}\mathbf{e}_3. \tag{1.2}$$

Здесь проекции записаны в виде скалярных произведений вектора **x** на соответствующие орты.

Вектор **x** выражает какой-либо геометрический или физический объект, например, параллельный сдвиг твердого тела (заданный по величине и направлению), силу, скорость, напряженность электрического поля в данной точке и т. п. Этот объект имеет реальное существование независимо от того, в какой системе координат мы его рассматриваем и рассматриваем ли мы его вообще. Однако числа x_1, x_2, x_3 — координаты вектора **x** — зависят уже не только от самого вектора **x**, но и от координатной системы, к которой он отнесен.

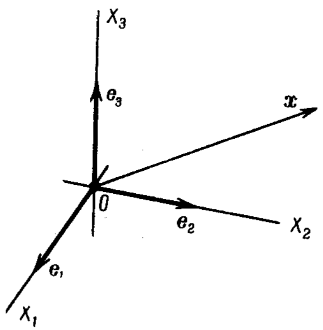

Рис. 1.

Между тем, координатные оси можно выбирать со значительным произволом: их можно подвергать произвольным параллельным сдвигам и поворотам около начала O.

Таким образом, наш способ задания векторов **x** координатами x_1, x_2, x_3 отражает между прочим и произвол выбора координатных осей. Это обстоятельство является вредным: на картину изучаемых нами векторов (а в дальнейшем и более сложных объектов) накладывается, вообще говоря, случайный выбор координатных осей. Вследствие этого изучаемая картина усложняется излишними подробностями. Мы увидим далее, что основная задача тензорного исчисления — разобраться в создавшемся положении, научиться выделять то существенное, что относится к самим изучаемым объектам, и отбрасывать то случайное, что привнесено произвольным выбором координатных осей.

Для этой цели нужно выяснить прежде всего, как меняются координаты неизменного вектора **x** вследствие перехода от одних координатных осей к другим.

Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать лишь поворот осей (включая и зеркальное отражение) около неподвижного начала O. Параллельных сдвигов осей мы, таким образом, не рассматриваем. Это объясняется тем, что в большинстве геометрических и физических приложений положение начала O или вообще не играет роли (как, например, для подсчета координат вектора) или, наоборот, естественно определяется (большей частью — это та точка, в бесконечно малой окрестности которой изучается геометрическая или физическая картина).

В обоих случаях нет надобности рассматривать параллельные сдвиги осей, и начало O можно считать неподвижным.

Итак, пусть мы перешли при неподвижном начале O от старого ортогонального репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к такому же новому реперу $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Этот переход можно задать, выразив новые орты в разложении по старым:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= A_{11}\mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= A_{31}\mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Из этих соотношений немедленно следует, что скалярное произведение $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2$ равно A_{12} и вообще

$$A_{ij} = \mathbf{e}'_i\mathbf{e}_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.4}$$

Другими словами, A_{ij} совпадает со скалярным произведением i-го нового орта на j-й старый орт, т. е. с косинусом угла между этими ортами.

Выразим теперь старые орты через новые при помощи обратной матрицы A'_{ij}:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= A'_{11}\mathbf{e}'_1 + A'_{12}\mathbf{e}'_2 + A'_{13}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_2 &= A'_{21}\mathbf{e}'_1 + A'_{22}\mathbf{e}'_2 + A'_{23}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_3 &= A'_{31}\mathbf{e}'_1 + A'_{32}\mathbf{e}'_2 + A'_{33}\mathbf{e}'_3. \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Аналогично предыдущему получим:

$$A'_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}'_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.6}$$

Сравнивая (1.4) с (1.6), мы замечаем, что

$$A'_{ij} = A_{ji}, \tag{1.7}$$

т. е. матрицы $\|A_{ij}\|$ и $\|A'_{ij}\|$ — взаимно транспонированные. Но, кроме того, они и взаимно обратные, так как определяют взаимно обратные преобразования (1.3) и (1.5).

Итак, чтобы получить матрицу, обратную $\|A_{ij}\|$, достаточно ее транспонировать. Матрицы с этим свойством называются *ортогональными*. То, что матрицы $\|A_{ij}\|$, $\|A'_{ij}\|$ взаимно обратные, можно записать в виде равенства их произведения единичной матрице:

$$\sum_s A_{js}A'_{sk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 \ (j \neq k), \\ 1 \ (j = k), \end{cases}$$

или согласно (1.7)

$$\sum_s A_{js}A_{ks} = \delta_{jk}. \tag{1.8}$$

Перемножая эти же матрицы в обратном порядке, получим аналогично:

$$\sum_s A_{sj}A_{sk} = \delta_{jk}. \tag{1.9}$$

Каждое из соотношений (1.8), (1.9), очевидно, равносильно ортогональности матрицы.

Пользуясь формулами (1.8), легко показать, что ортогональность матрицы $\|A_{ij}\|$ не только необходима, но и достаточна для того, чтобы формулы (1.3) давали переход от ортогонального репера снова к ортогональному реперу.

Ортогональная матрица имеет определитель ± 1.

В самом деле, равенства (1.8) показывают, что, умножая определитель ортогональной матрицы на себя (причем строки умножаются на строки), мы получаем определитель единичной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, квадрат определителя ортогональной матрицы равен 1, а сам определитель равен ± 1.

Положительный знак означает, что новый ортогональный репер имеет ту же ориентацию, что и старый, а отрицательный — что ориентация репера меняется на обратную (правый заменяется левым, и наоборот).

Посмотрим теперь, как будут меняться координаты неизменного вектора $\mathbf{x}$ при повороте осей. Запишем формулы (1.2) в старой координатной системе:

$$x_i = \mathbf{x}\mathbf{e}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

и аналогично, в новой координатной системе:

$$x'_i = \mathbf{x}\mathbf{e}'_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Умножая скалярно на $\mathbf{x}$ равенства (1.3) и пользуясь последними формулами, получим:

$$\begin{aligned} x'_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3, \\ x'_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3, \\ x'_3 &+ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3. \end{aligned}$$

Другими словами, при повороте осей координаты каждого данного вектора подвергаются тому же ортогональному преобразованию (1.3), что и орты. Эти преобразования мы будем записывать кратко:

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i, \tag{1.10}$$

$$x'_p = \sum_i A_{pi}x_i. \tag{1.11}$$

В пределах главы I индекс, по которому происходит суммирование, всегда пробегает значения 1, 2, 3. Равным образом свободным буквенным индексам в формулах можно придавать любое из этих значений. Преобразования, обратные (1.10) и (1.11), запишутся аналогичным образом:

$$\mathbf{e}_i = \sum_p A'_{ip}\mathbf{e}'_p = \sum_p A_{pi}\mathbf{e}'_p, \tag{1.12}$$

$$x_i = \sum_p A'_{ip}x'_p = \sum_p A_{pi}x'_p. \tag{1.13}$$

Мы воспользовались здесь соотношением (1.7).

Будем говорить, что нам дан тензор 1-й валентности, если в каждой из координатных систем нам заданы три занумерованных числа x_1, x_2, x_3 *преобразующихся при повороте осей по закону* (1.11). Эти числа мы будем называть *координатами тензора*.

Мы видим, что координаты данного вектора, рассматриваемые во всевозможных координатных системах, образуют *вектор 1-й валентности*. Очевидно и обратное: координаты каждого тензора 1-й валентности можно рассматривать как координаты некоторого постоянного вектора. Для этого достаточно подобрать вектор так, чтобы это имело место в одной координатной системе; в силу того что и для координат вектора, и для координат одновалентного тензора действует закон преобразования (1.11), это же будет иметь место и в любой координатной системе.

Однако не нужно думать, что одновалентный тензор может иметь истолкование только лишь в виде вектора. Пусть, например, нам задана фиксированная плоскость, не проходящая через начало координат O. Уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1.$$

Когда мы совершаем поворот координатных осей, коэффициенты уравнения a_1, a_2, a_3 подвергаются, как нетрудно подсчитать преобразованию по тому же закону (1.11) и образуют, следовательно, одновалентный тензор (как и координаты вектора).