§ 2. Понятие о двухвалентном тензоре

Понятие о двухвалентном и вообще многовалентном тензоре естественно возникает при рассмотрении уже простейших геометрических образов.

Возьмем, например, (неконическую) центральную поверхность 2-го порядка с центром в начале O. Ее уравнение можно записать в виде

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 1. \tag{2.1}$$

Как мы условились, каждый индекс суммирования пробегает значения 1, 2, 3. Матрица коэффициентов $\|a_{ij}\|$ предполагается симметричной:

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{2.2}$$

Мы будем называть коэффициентами именно числа a_{ij}, хотя после приведения подобных членов в уравнении (2.1) коэффициенты при произведениях координат будут иметь вид $2a_{ij}$ (при $i \neq j$).

Совершаем поворот координатных осей. Новые координаты каждого вектора (и тем самым каждой точки) выражаются через старые согласно (1.11). Обратное преобразование согласно (1.13) запишется в виде

$$x_i = \sum_k A_{pi} x'_p. \tag{2.3}$$

И аналогично,

$$x_j = \sum_q A_{qj} x'_q.$$

Вставляя эти выражения в (2.1), получим уравнение той же поверхности в новых координатах:

$$\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij} x'_p x'_q = 1.$$

Очевидно, коэффициенты преобразованного уравнения имеют вид

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij} \qquad (p,\ q = 1,\ 2,\ 3). \tag{2.4}$$

Получается, что наша поверхность определяет в каждой координатной системе (с началом O в центре поверхности) совокупность девяти чисел a_{ij}, занумерованных двумя индексами, каждый из которых независимо от другого пробегает значения 1, 2, 3. При повороте координатных осей (1.12) эти числа преобразуются по закону (2.4), который, очевидно, повторяет закон (1.10) для каждого из двух индексов, имеющихся у a_{ij}.

Мы будем говорить, что нам дан тензор 2-й валентности, если в каждой из координатных систем нам заданы девять чисел, занумерованных двумя индексами

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

и преобразующихся при повороте координатных осей по закону (2.4). Сами числа a_{ij} мы будем называть *координатами* тензора.

Условия (2.2) не являются обязательными. В тех случаях, когда они соблюдаются, тензор 2-й валентности называется *симметрическим*. Таким образом, коэффициенты уравнения центральной поверхности 2-го порядка с центром в начале O образуют симметрический тензор 2-й валентности. Нетрудно показать и обратное: координаты (ненулевого) симметрического тензора 2-й валентности всегда можно истолковать как коэффициенты уравнения некоторой фиксированной поверхности 2-го порядка с центром O.

Впрочем, это истолкование, как мы вскоре увидим, является не самым важным.

Нетрудно получить примеры и несимметрических тензоров 2-й валентности. Возьмем два вектора $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ и обозначим через a_{ij} всевозможные попарные произведения их координат:

$$a_{ij} = x_i y_j. \tag{2.6}$$

Определенные таким образом в каждой координатной системе числа a_{ij} занумерованы двумя индексами и образуют тензор 2-й валентности. В самом деле, при повороте осей получаем согласно (1.11)

$$x'_p = \sum_i A_{pi} x_i. \tag{2.7}$$

И аналогично

$$y'_q = \sum_j A_{qj} y_j. \tag{2.8}$$

Перемножая эти равенства почленно, получим:

$$x'_p y'_q = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} x_i y_j, \tag{2.9}$$

а значит,

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij}, \tag{2.10}$$

т. е. имеет место закон преобразования (2.4). Здесь особенно наглядно выступает то обстоятельство, что этот закон преобразования получается повторением закона преобразования (1.11) для каждого из двух индексов. В частности, если в формулах (2.6) векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равны, то тензор a_{ij} симметрический.

§ 3. Двухвалентный тензор как аффинор

Важнейшее значение двухвалентного тензора a_{ij} состоит в том, что он всегда определяет некоторый аффинор.

Аффинором $\mathfrak{A}$ называется закон, посредством которого каждому вектору $\mathbf{x}$ в пространстве сопоставляется некоторый вектор $\mathbf{y}$, обозначаемый нами

$$\mathbf{y}=\mathfrak{A}\mathbf{x}, \tag{3.1}$$

причем должны соблюдаться следующие условия:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathfrak{A}\mathbf{x}+\mathfrak{A}\mathbf{x}', \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x})=\alpha\mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ — произвольные векторы, а α — произвольное (вещественное) число.

Другими словами, аффинор $\mathfrak{A}$ означает задание функциональной зависимости вектора $\mathbf{y}$ от вектора-аргумента $\mathbf{x}$, причем эта зависимость должна быть линейной, т. е. при сложении двух значений аргумента $\mathbf{x}$ складываются и соответствующие значения функции $\mathbf{y}$ (согласно (3.2)), а при умножении аргумента $\mathbf{x}$ на какое-либо число функция $\mathbf{y}$ также умножается на это число (согласно (3.3)).

Рассмотрим, в частности, те векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$, в которые перейдут орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если аффинор $\mathfrak{A}$ не задан наперед, то его всегда можно подобрать (и притом единственным образом) так, чтобы векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$ имели любые наперед заданные значения. В самом деле, задавшись этими значениями, мы можем вычислить $\mathfrak{A}\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ с координатами x_1, x_2, x_3:

$$\mathfrak{A}\mathbf{x}=\mathfrak{A}(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3)=x_1\mathfrak{A}\mathbf{e}_1+x_3\mathfrak{A}\mathbf{e}_3. \tag{3.4}$$

Мы воспользовались здесь свойствами (3.2), (3.3) искомого аффинора $\mathfrak{A}$. Таким образом, искомый аффинор, если он существует, определяется формулой (3.4). Нетрудно проверить, что эта формула действительно определяет аффинор, т. е. свойства (3.2), (3.3) всегда имеют место.

Можно следующим образом наглядно представить себе действие аффинора.

Для каждой точки M пространства строим ее радиус-вектор

$$\mathbf{x}=\overline{OM} \tag{3.5}$$