т. е. имеет место закон преобразования (2.4). Здесь особенно наглядно выступает то обстоятельство, что этот закон преобразования получается повторением закона преобразования (1.11) для каждого из двух индексов. В частности, если в формулах (2.6) векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равны, то тензор a_{ij} симметрический.

§ 3. Двухвалентный тензор как аффинор

Важнейшее значение двухвалентного тензора a_{ij} состоит в том, что он всегда определяет некоторый аффинор.

Аффинором $\mathfrak{A}$ называется закон, посредством которого каждому вектору $\mathbf{x}$ в пространстве сопоставляется некоторый вектор $\mathbf{y}$, обозначаемый нами

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \tag{3.1}$$

причем должны соблюдаться следующие условия:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = \mathfrak{A}\mathbf{x} + \mathfrak{A}\mathbf{x}', \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ — произвольные векторы, а α — произвольное (вещественное) число.

Другими словами, аффинор $\mathfrak{A}$ означает задание функциональной зависимости вектора $\mathbf{y}$ от вектора-аргумента $\mathbf{x}$, причем эта зависимость должна быть линейной, т. е. при сложении двух значений аргумента $\mathbf{x}$ складываются и соответствующие значения функции $\mathbf{y}$ (согласно (3.2)), а при умножении аргумента $\mathbf{x}$ на какое-либо число функция $\mathbf{y}$ также умножается на это число (согласно (3.3)).

Рассмотрим, в частности, те векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$, в которые перейдут орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если аффинор $\mathfrak{A}$ не задан наперед, то его всегда можно подобрать (и притом единственным образом) так, чтобы векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$ имели любые наперед заданные значения. В самом деле, задавшись этими значениями, мы можем вычислить $\mathfrak{A}\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ с координатами x_1, x_2, x_3:

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1\mathfrak{A}\mathbf{e}_1 + x_3\mathfrak{A}\mathbf{e}_3. \tag{3.4}$$

Мы воспользовались здесь свойствами (3.2), (3.3) искомого аффинора $\mathfrak{A}$. Таким образом, искомый аффинор, если он существует, определяется формулой (3.4). Нетрудно проверить, что эта формула действительно определяет аффинор, т. е. свойства (3.2), (3.3) всегда имеют место.

Можно следующим образом наглядно представить себе действие аффинора.

Для каждой точки M пространства строим ее радиус-вектор

$$\mathbf{x} = \overline{OM} \tag{3.5}$$

и подвергаем его действию аффинора $\mathfrak{A}$. Новый вектор $\mathfrak{A}\mathbf{x}$, отложенный также из начала O, укажет своим концом некоторую, вообще говоря, новую точку M':

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \overline{OM'}. \tag{3.6}$$

В результате каждая точка M пространства перейдет в новое положение M', и тем самым пространство подвергнется некоторой деформации.

В частности, единичный кубик, построенный на ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, перейдет в параллелепипед, построенный на векторах $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$, *если предположить, что эти векторы некомпланарны*. Действительно, точкам кубика будут отвечать координаты x_i, для которых $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ ($i = 1, 2, 3$), а тогда согласно (3.4) преобразованные точки M' заполняют указанный параллелепипед.

Вообще пространственная решетка, составленная из единичных (или любых других) одинаковых кубиков, растянется (сожмется) и перекосится так, что кубики превратятся в параллелепипеды, однако тоже одинаковые.

В случае некомпланарности векторов $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_2$, $\mathfrak{A}\mathbf{e}_3$ рассматриваемая деформация пространства называется его *центроаффинным преобразованием*. В случае компланарности этих векторов все пространство отображается в одну плоскость или в одну прямую, или, наконец, даже в одну точку O (случай, когда $\mathfrak{A}\mathbf{x} \equiv 0$). Это — различные случаи вырождения аффинора $\mathfrak{A}$.

Переходим к координатной записи аффинора $\mathfrak{A}$. Мы знаем, что аффинор $\mathfrak{A}$ вполне определяется заданием векторов $\mathfrak{A}\mathbf{e}_i$, а эти последние можно задать их разложением по ортам. Запишем это разложение, обозначая коэффициенты через a_{pq}:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \\ \mathfrak{A}\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \\ \mathfrak{A}\mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

или в краткой записи:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_q = \sum_p a_{pq}\mathbf{e}_p. \tag{3.8}$$

Вполне определяющие аффинор $\mathfrak{A}$ коэффициенты a_{pq} мы будем называть его *координатами*. Умножая скалярно первое из уравнений (3.7), например, на $\mathbf{e}_3$, получим в силу (1.1) $\mathbf{e}_3\mathfrak{A}\mathbf{e}_1 = a_{31}$. Аналогичным образом и вообще

$$a_{pq} = \mathbf{e}_p\mathfrak{A}\mathbf{e}_q. \tag{3.9}$$

Будем рассматривать один и тот же аффинор $\mathfrak{A}$, но в разных координатных системах. Его координаты a_{pq} будут иметь при этом каждый раз другие численные значения. Спрашивается, по какому закону эти численные значения будут меняться при повороте координатных осей?

Запишем формулы (3.9) в новой координатной системе:

$$a'_{pq} = \mathbf{e}'_p \mathfrak{A} \mathbf{e}'_q.$$

Но согласно (1.10)

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}'_q = \sum_j A_{qj}\mathbf{e}_j,$$

а следовательно,

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi}A_{qj}\mathbf{e}_i \mathfrak{A} \mathbf{e}_j = \sum_i \sum_j A_{pi}A_{qj}a_{ij} \qquad (p, q = 1, 2, 3).$$

Полученный закон преобразования совпадает с (2.4), и это показывает, *что координаты аффинора a_{ij} образуют двухвалентный тензор.*

Нетрудно проверить и обратное: координаты всякого двухвалентного тензора a_{ij} могут быть истолкованы как координаты некоторого аффинора $\mathfrak{A}$. Для этого достаточно построить аффинор $\mathfrak{A}$ с данными координатами в какой-либо одной координатной системе. В силу одинакового закона преобразования (2.4) для координат двухвалентного тензора и координат аффинора равенство между этими координатами сохранится и при переходе в любую другую координатную систему.

Дадим, наконец, координатную запись аффинора $\mathfrak{A}$, выразив координаты вектора $\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}$ через координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}$. Запишем разложения:

$$\mathbf{x} = \sum_q x_q \mathbf{e}_q, \tag{3.10}$$

$$\mathbf{y} = \sum_p y_p \mathbf{e}_p \tag{3.11}$$

и подействуем на (3.10) аффинором $\mathfrak{A}$.

Получим, пользуясь линейными свойствами аффинора и формулами (3.8):

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A} \sum_q x_q \mathbf{e}_q = \sum_q x_q \mathfrak{A} \mathbf{e}_q = \sum_q x_q \sum_p a_{pq} \mathbf{e}_p. \tag{3.12}$$

Так как (3.11) и (3.12) дают разложение одного и того же вектора $\mathbf{y}$, то коэффициенты при ортах $\mathbf{e}_p$ должны быть одинаковы. Следовательно:

$$y_p = \sum_q a_{pq} x_q. \tag{3.13}$$

Итак, координаты вектора $\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}$ получаются из координат вектора $\mathbf{x}$ линейным преобразованием, матрица которого совпадает с матрицей a_{pq} координат аффинора (в то время как в преобразовании (3.7) мы пользовались транспонированной матрицей). Заметим еще, что для вырождения аффинора $\mathfrak{A}$, т. е. для компланарности векторов (3.7), необходимо и достаточно обращение в нуль определителя $|a_{pq}|$. В этом и только в этом случае преобразование (3.13) необратимо.

Отметим частный случай аффинора $\mathfrak{A}$, *когда он сводится к умножению каждого вектора* $\mathbf{x}$ *на одно и то же число* λ:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{3.14}$$

Очевидно, в этом случае

$$y_p = \lambda x_p \qquad (p = 1,\ 2,\ 3). \tag{3.15}$$

Сравнивая с (3.13) убеждаемся, что матрица координат нашего аффинора *в любой координатной системе* имеет вид

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix}. \tag{3.16}$$

Следовательно, соответствующий двухвалентный тензор (3.16) обладает тем замечательным свойством, что его координаты остаются постоянными во всех координатных системах.

Центроаффинное преобразование, отвечающее аффинору в нашем случае, есть преобразование подобия (при $\lambda \neq 0$).

При $\lambda = 1$ аффинор (3.14) называется *единичным* и дает, очевидно, тождественное преобразование. Мы будем обозначать единичный аффинор через E, так что $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Соответствующий ему тензор

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{3.17}$$

также называется единичным. Для координат единичного тензора принято обозначение δ_{ij}, причем во всех координатных системах

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \tag{3.18}$$

Пользуясь обозначениями (3.18), можно переписать (3.16) (при любом λ) в следующем виде:

$$a_{ij} = \lambda\delta_{ij}. \tag{3.19}$$