§ 4. Многовалентные тензоры. Тензорная алгебра

По аналогии с двухвалентным тензором можно ввести понятие о тензоре любой валентности.

Мы говорим, что нам дан тензор валентности v, если в каждой из координатных систем нам заданы 3^v чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$, занумерованных v индексами $i_1, i_2, \ldots, i_v$, каждый из которых независимо от других пробегает значения 1, 2, 3 (и которые в записи различаются друг от друга 1-м, 2-м, ..., v-м местом записи при букве a), причем при повороте координатных осей эти числа преобразуются по закону:

$$a'_{p_1 p_2 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_v i_v} a_{i_1 i_2 \ldots i_v}. \tag{4.1}$$

Здесь предполагается, что поворот осей задается, как и прежде, формулами (1.10).

Закон преобразования (4.1) получается, очевидно, повторением закона преобразования одновалентного тензора (1.11) для каждого из индексов многовалентного тензора.

Как и раньше, мы будем называть числа $a_{i_2 i_2 \ldots i_v}$ *координатами* тензора в данной координатной системе.

Многовалентные тензоры также выражают различные геометрические и физические объекты. В связи с этим существенно помнить, что тензор есть нечто единое и целое, а «распадение» его на координаты $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ происходит лишь по отношению к данной координатной системе. В законе преобразования (4.1) это сказывается в том, что *каждая* координата тензора в новой системе выражается, вообще говоря, через *все* его координаты $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ в старой системе, т. е. распадение на координаты не имеет инвариантного смысла.

Над тензорами можно производить ряд инвариантных операций, т. е. операций, результаты которых не зависят от той координатной системы, в которой они производятся.

1°. *Сложение тензоров одинаковой валентности*. Пусть $a_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ и $b_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ — два тензора одинаковой валентности.

Составим *в каждой координатной системе* числа $c_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ путем сложения соответствующих координат наших тензоров

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_v} = a_{i_1 i_2 \ldots i_v} + b_{i_1 i_2 \ldots i_v}. \tag{4.2}$$

Мы утверждаем, что эти числа тоже являются координатами некоторого тензора валентности v.

Для этого достаточно показать, что $c_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ подчиняются закону преобразования (4.1). Но это почти очевидно. В самом деле, для тензоров $a'_{i_1 i_2 \ldots i_v}$, $b_{i_1 i_2 \ldots i_v}$ закон преобразования (4.1) имеет место:

$$a'_{p_1 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} \ldots A_{p_v i_v} a_{i_1 \ldots i_v},$$
$$b'_{p_1 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} \ldots A_{p_v i_v} b_{i_1 \ldots i_v}.$$

Складываем эти равенства почленно и пользуемся формулами (4.2), учитывая, что числа $c_{i_1 \ldots i_v}$ построены в каждой координатной системе, в том числе и в той, которая у нас отмечена штрихом. Получим:

$$c'_{p_1 \ldots p_v} = \sum_{i_1} \ldots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} \ldots A_{p_v i_v} c_{i_1 \ldots i_v}.$$

Таким образом, закон преобразования (4.1) выполняется и для $c_{i_1 \ldots i_v}$, так что эти числа, построенные в любой координатной системе, представляют собой координаты *одного и того же* тензора.

Этот тензор называется *суммой* двух данных тензоров, а сама операция (4.2) — их *сложением*.

Сложение тензоров отвечает сложению (в каком-нибудь естественном смысле) тех геометрических и физических объектов, которые данными тензорами изображаются. Так, например, сложение одновалентных тензоров по схеме (4.2)

$$z_i = x_i + y_i \tag{4.3}$$

соответствует сложению тех векторов, координаты которых образуют данные тензоры:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}.$$

Равным образом, сложение двухвалентных тензоров

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{4.4}$$

отражает сложение соответствующих им аффиноров:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}. \tag{4.5}$$

Последнее равенство нужно понимать в том смысле, что для любого вектора $\mathbf{x}$

$$\mathfrak{C}\mathbf{x} = \mathfrak{A}\mathbf{x} + \mathfrak{B}\mathbf{x}. \tag{4.6}$$

Ясно, что сложение нескольких тензоров одинаковой валентности выполняется совершенно так же, как и сложение двух.

2°. *Умножение тензоров.* Эта операция применяется к любым двум (или нескольким) тензорам, заданным в определенном порядке.

Лучше всего показать ее на примере; в общем случае дело будет обстоять совершенно так же.

Пусть требуется умножить трехвалентный тензор a_{ijk} на двухвалентный тензор b_{lm}. Составляем в *каждой* координатной системе всевозможные произведения каждой координаты a_{ijk} на каждую координату b_{lm}. Эти произведения, которые, очевидно, будут зависеть от пяти индексов, мы обозначим:

$$c_{ijklm} = a_{ijk} b_{lm}, \tag{4.7}$$

причем условимся писать (при букве c) сначала индексы первого множителя с сохранением их порядка, затем индексы второго множителя с сохранением их порядка (если бы множителей было несколько, мы таким же образом последовательно переписали бы индексы каждого из них).

Мы утверждаем, что числа c_{ijklm}, составленные нами согласно (4.7) *в каждой координатной системе, суть координаты одного и того же тензора* 5*-й валентности.* Чтобы это проверить, выпишем закон преобразования (4.1) для перемножаемых тензоров:

$$a'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} a_{ijk},$$

$$b'_{st} = \sum_l \sum_m A_{sl} A_{tm} b_{lm}.$$

Перемножим эти равенства почленно и воспользуемся формулой (4.7), учитывая, что она имеет место в любой координатной системе, в том числе и в той, которая отмечена у нас штрихом. Получим:

$$c'_{pqrst} = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_m A_{pi} A_{qi} A_{rk} A_{sl} A_{tm} c_{ijklm}. \tag{4.8}$$

Нетрудно видеть, что мы получили для чисел c_{ijklm} закон преобразования вида (4.1) для случая $v = 5$. Это показывает, что числа c_{ijklm} в любой координатной системе являются координатами одного и того же тензора 5-й валентности.

Полученный таким образом тензор называется произведением двух заданных (в определенном порядке) тензоров, а сама операция — умножением тензоров.

По этому же образцу рассматривается и произведение любого числа тензоров любой валентности, заданных в определенном порядке. Валентность тензора, получающегося в произведении, равна, очевидно, сумме валентностей множителей: по схеме (4.7) координаты произведения снабжаются индексами, снятыми поочередно со всех множителей.

В частности, в этой же схеме можно рассматривать умножение тензора на инвариант (т. е. на число, заданное независимо от выбора координатной системы и не меняющееся при ее преобразовании).

Всякий инвариант a можно рассматривать как тензор 0-й валентности, т. е. тензор, лишенный индексов и имеющий потому лишь одну координату a. (В общем случае число координат тензора равно 3^v, где v — его валентность; в случае $v=0$ получаем $3^0=1$.)

Схема перемножения (4.7) дает в этом случае

$$c_{lm} = ab_{lm}, \tag{4.9}$$

т. е. просто все координаты тензора b_{lm} умножаются на инвариант a и превращаются в координаты нового тензора c_{lm} той же валентности.

Заметим, что вычитание тензора из тензора той же валентности мы не считаем самостоятельной операцией, потому что она сводится к сложению уменьшаемого с вычитаемым, умноженным предварительно на инвариант -1.

3°. *Свертывание тензоров.* Пусть нам дан, какой-нибудь тензор не менее, чем 2-й валентности, например, трехвалентный, a_{ijk}. Отметим какие-либо два его индекса, например 2-й и 3-й, и сделаем с ними следующее. *В каждой координатной системе* отберем те координаты нашего тензора, для которых отмеченные индексы равны (это будут координаты вида a_{ill}), и составим сумму всех таких координат при каких-нибудь фиксированных остальных индексах (в нашем случае при как-нибудь фиксированном первом индексе i).

Эта сумма имеет вид $\sum\limits_{l} a_{ill}$ и зависит *только* от фиксированных индексов (в нашем случае от индекса i). Обозначим ее a_i. Итак,

$$a_i = \sum_{l} a_{ill}. \tag{4.10}$$

Мы утверждаем, что числа a_i, составленные в каждой координатной системе согласно (4.10), *образуют тензор* 1-*й валентности.* Мы будем говорить, что этот тензор получается из исходного тензора a_{ijk} *свертыванием* 2-го и 3-го индекса.

Для доказательства выпишем закон преобразования (4.1) в применении к исходному тензору

$$a'_{pqr} = \sum_{i}\sum_{j}\sum_{k} A_{ri}A_{qj}A_{rk}a_{ijk}. \tag{4.11}$$

Составим теперь числа a_i в новой (штрихованной) координатной системе. Обозначая эти числа a'_p, получим согласно (4.10)

$$a_p = \sum_{s} a'_{pss}. \tag{4.12}$$

Заменяя в преобразовании (4.11) индексы q и r через s и вставляя результат (в 4.12), получим:

$$a'_p = \sum_s \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{sj} A_{sk} a_{ijk}. \tag{4.13}$$

Выполним прежде всего суммирование по s. При этом согласно (1.9)

$$\sum_s A_{sj} A_{sk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k), \end{cases} \tag{4.14}$$

и (4.13) принимает вид

$$a'_p = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} \delta_{jk} a_{ijk}. \tag{4.15}$$

В процессе суммирования по j и k можно сохранить лишь члены, для которых $j = k$; остальные члены согласно (4.14) обратятся в нуль. Обозначим общее значение индексов j и k через l; при этом $\delta_{jk} = \delta_{ll} = 1$, и (4.15) принимает вид

$$a'_p = \sum_i \sum_l A_{pi} a_{ill} = \sum_i A_{pi} a_i. \tag{4.16}$$

Мы воспользовались здесь формулой (4.10). Этим доказан тензорный закон преобразования чисел a_i, так что они действительно определяют одновалентный тензор.

Совершенно так же производится свертывание двух произвольно избранных индексов в любом тензоре. Например, свернуть 2-й и 4-й индекс в тензоре a_{pqrst} значит составить новый тензор следующим образом:

$$a_{prt} = \sum_l a_{plrlt}. \tag{4.17}$$

Тензорный характер результата доказывается совершенно так же, как и выше. Валентность свернутого тензора на две единицы ниже, чем у исходного.

Повторяя свертывание достаточное число раз, причем валентность снижается каждый раз на 2, мы в случае тензора четной валентности приходим в конце концов к тензору нулевой валентности, т. е. к инварианту. Таким образом свертывание есть важный источник получения инвариантов рассматриваемых геометрических и физических объектов.

Так, для аффинора $\mathfrak{A}$ с координатами a_{ij} можно составить путем свертывания важный инвариант

$$a = \sum_l a_{ll}, \tag{4.18}$$

который называется *следом* этого аффинора.

Для двухвалентного тензора (2.6)

$$a_{ij} = x_i y_j,$$

где x_i, y_j — координаты двух произвольных векторов, свертывание дает инвариант

$$a = \sum_l a_{ll} = \sum_l x_l y_l = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \mathbf{xy}. \qquad (4.19)$$

Мы видим, что этот инвариант есть скалярное произведение векторов **x**, **y**, которое по своему геометрическому смыслу действительно не зависит от выбора координатной системы (а зависит лишь от самих векторов **x**, **y**).

Этот пример проливает свет на механизм операции свертывания. Она протекает и в общем случае как бы по образцу составления скалярного произведения из попарных произведений координат $x_l y_l$, и с этим связан ее инвариантный характер.

Очень часто, как и в приведенном примере, свертываемый тензор предварительно получен перемножением двух или нескольких тензоров. В таком случае мы будем кратко говорить, что один тензор свертывается с другим или с другими, *подразумевая*, что предварительно составляется произведение этих тензоров. В нашем примере: тензор x_i свертывается с тензором y_j.

4°. *Подстановка индексов*. Еще одна травиальная, но имеющая большое значение операция над тензорами, может быть названа *подстановкой индексов*. Она заключается в том, что из тензора, например a_{ijk}, составляется новый тензор b_{ijk} той же валентности и даже с теми же координатами, но с иной нумерацией этих координат. Например, координата, которая раньше была занумерована индексами i, j, k (индекс i — первый, j — второй, k — третий), теперь нумеруется теми же индексами, но в другом порядке, например, j, k, i (индекс j — первый, k — второй, i — третий). Получающийся в результате новый тензор определяется, очевидно, формулой

$$b_{jki} = a_{ijk}. \qquad (4.20)$$

То, что b_{jki} представляет собой действительно тензор, т. е. тоже подчиняется тензорному закону преобразования, проверяется очевидным образом.

Не следует думать, что операция подстановки индексов ничего не изменяет, и мы получаем «прежний тензор». В определение тензора входит нумерация его координат при помощи значений первого, второго и т. д. его индексов. Поэтому изменение этой нумерации есть изменение и самого тензора.

Разумеется, аналогичным образом можно производить любую подстановку индексов над тензором любой валентности.