§ 5. Кососимметрические тензоры

Свертывание не есть единственный источник получения инвариантов данного тензора. В этом параграфе мы встретимся с другим важным способом; но предварительно нам нужно познакомиться с кососимметрическими тензорами.

Тензор называется кососимметрическим, если при транспозиции (перестановке) любых двух индексов у любой его координаты она меняет знак.

Рассмотрим прежде всего двухвалентный кососимметрический тензор c_{ij}.

Согласно сказанному он характеризуется свойством

$$c_{ij} = -c_{ji} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{5.1}$$

В частности, если $i = j$, мы получаем:

$$c_{ii} = -c_{ii}, \qquad \text{откуда} \qquad c_{ii} = 0. \tag{5.2}$$

Двухвалентный кососимметрический тензор называется кратко *бивектором*. Будем считать, что мы находимся в *правой* координатной системе. Тогда, обозначая

$$u_1 = -c_{23}, \qquad u_2 = -c_{31}, \qquad u_3 = -c_{12} \tag{5.3}$$

и принимая во внимание (5.1) и (5.2), мы можем составить матрицу координат нашего бивектора:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & -u_3, & u_2 \\ u_3, & 0, & -u_1 \\ -u_2, & u_1, & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5.4}$$

Как мы знаем (§ 3), всякому двухвалентному тензору, в частности нашему бивектору c_{ij}, отвечает некоторый аффинор с теми же координатами. Обозначим этот аффинор через $\mathfrak{C}$ и выясним его характер. Для этой цели используем координатную запись аффинора (3.13), которая в нашем случае дает:

$$y_p = \sum_q c_{pq} x_q,$$

или в подробной записи при $p = 1,\ 2,\ 3$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -x_2 u_3 + x_3 u_2, \\ y_2 &= x_1 u_3 - x_3 u_1, \\ y_3 &= -x_1 u_2 + x_2 u_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Мы замечаем, что вектор $\mathbf{y} = \mathfrak{C}\mathbf{x}$ есть не что иное, как векторное произведение $\mathbf{u}$ на $\mathbf{x}$, если обозначить через $\mathbf{u}$ вектор с координатами u_1, u_2, u_3. Итак,

$$\mathfrak{C}\mathbf{x} = [\mathbf{u}\mathbf{x}]. \tag{5.6}$$

Из этой записи видно, в частности, что вектор $\mathbf{u}$ будет вполне определенным независимо от выбора координатной системы. В самом деле, если бы он мог меняться, то менялась бы и *зависимость* вектора $\mathbf{y}$ от $\mathbf{x}$, что невозможно, так как мы рассматриваем некоторый вполне определенный аффинор $\mathfrak{C}$.

Таким образом, аффинор $\mathfrak{C}$, *отвечающий бивектору* c_{ij}, *сводится к векторному умножению некоторого постоянного вектора* $\mathbf{u}$ *на вектор-аргумент* $\mathbf{x}$.

При этом *в правых координатных системах координаты бивектора* c_{ij} *и вектора* $\mathbf{u}$ *связаны формулами* (5.3).

В левых координатных системах, напротив, полагаем

$$u_1 = c_{23}, \qquad u_2 = c_{31}, \qquad u_3 = c_{12}. \tag{5.7}$$

Тогда в правых частях (5.5) тоже нужно изменить знаки на обратные; мы получаем запись (по-прежнему *правого*) векторного произведения $[\mathbf{u}\mathbf{x}]$ в *левой* системе и снова переходим к (5.6).

Переходим к *трехвалентному кососимметрическому тензору*, который носит название *тривектора*. Обозначим его координаты c_{ijk}. Для любых двух его индексов, например 2-го и 3-го, имеет место соотношение

$$c_{ijk} = -c_{ikj}. \tag{5.8}$$

Если среди его индексов есть хотя бы два одинаковых, например 2-й и 3-й, то (5.8) принимает вид

$$c_{ijj} = -c_{ijj}, \qquad \text{откуда} \quad c_{ijj} = 0. \tag{5.9}$$

Итак, если мы хотим рассматривать отличные от нуля координаты тривектора, то должны брать все три индекса различными, т. е. придать им значения 1, 2, 3. Получим шесть следующих координат тривектора:

$$c_{123} = c_{231} = c_{312} = -c_{213} = -c_{321} = -c_{132}. \tag{5.10}$$

Знаки равенства поставлены на основании (5.8) и аналогичных соотношений для любой пары индексов. Так, например, чтобы проверить первый знак равенства, достаточно в c_{123} переставить 1-й и 2-индексы, а у полученной координаты переставить 2-й и 3-й индексы. При двойной транспозиции дважды меняется знак, и полученная в итоге координата c_{231} равна c_{123}.

Нетрудно заметить, что общий смысл (5.10) состоит в том, что при четной подстановке индексов координата тривектора не меняется, а при нечетной — меняет только знак.

В результате у тривектора имеется лишь одна, как говорят, существенная координата, например, c_{123}. Остальные координаты или равны ей, или отличаются от нее только знаком, или, наконец, равны нулю.

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — три произвольных вектора, x_p, y_q, z_r — их координаты. Подсчитаем инвариант, полученный путем полного свертывания тензоров c_{ijk}, x_i, y_j, z_k:

$$I = \sum_i \sum_j \sum_k c_{ijk} x_i y_j z_k. \tag{5.11}$$

Сумма в правой части формально содержит 27 членов, но большинство членов равно нулю в силу (5.9). Остается лишь шесть членов, не равных нулю, а именно, те, для которых индексы i, j, k все различны (и представляют собой, следовательно, некоторую подстановку из 1, 2, 3). Эти члены имеют коэффициенты c_{ijk}, выражающиеся через c_{123} согласно (5.10).

Выписывая теперь (5.11) в развернутом виде, получим окончательно:

$$I = c_{123}(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2) =$$
$$= c_{123} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{cases} c_{123}(\mathbf{xyz}) & \text{(в правой системе)}, \\ -c_{123}(\mathbf{xyz}) & \text{(в левой системе)}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Мы использовали то обстоятельство, что полученный определитель выражает смешанное произведение $(\mathbf{xyz})$ в правой координатной системе и отличается от этого произведения лишь знаком в левой координатной системе (само смешанное произведение трех векторов мы берем всегда *правое*).

Из полученного результата вытекает, в частности, что

$$\left.\begin{aligned} c_{123} &= \frac{I}{\mathbf{xyz}} \quad \text{(в правой системе)}, \\ c_{123} &= -\frac{I}{\mathbf{xyz}} \quad \text{(в левой системе)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Мы предполагаем здесь, что $\mathbf{xyz} \neq 0$. Так как I и $\mathbf{xyz}$ инвариантны, то c_{123} сохраняет одно и то же численное значение во всех правых системах и одно и то же численное значение во всех левых системах, причем эти два значения отличаются только знаком. Величина, обладающая таким свойством, называется *относительным инвариантом*.

Итак, единственная существенная координата тривектора есть относительный инвариант. Это позволяет нам использовать тривекторы как источник получения инвариантов.

Заметим, что в рассматриваемом нами трехмерном пространстве невозможен кососимметрический тензор более чем 3-й валентности. Говоря точнее, такой тензор всегда имеет лишь нулевые координаты.

В самом деле, совершенно так же, как и в (5.9), убеждаемся, что наличие двух одинаковых индексов обращает координату нашего тензора в нуль. Между тем, его координаты всегда имеют по меньшей мере два одинаковых индекса, так как индексов у них четыре или больше, а принимать они могут лишь значения 1, 2, 3. Следовательно, все координаты нашего тензора равны нулю.

§ 6. Получение инвариантов с помощью кососимметрических тензоров

Если нам задан трехвалентный тензор a_{pqr} (не обязательно кососимметрический), то мы можем получить из него кососимметрический тензор c_{ijk} путем так называемой операции *альтернации*; а именно, каждая координата c_{ijk} определяется как среднее арифметическое шести координат тензора a_{pqr}, индексы при которых получены из i, j, k всевозможными подстановками (в том числе и тождественной), причем в случае четной подстановки координата берется со своим знаком, а в случае нечетной — с обратным:

$$c_{ijk}=\frac{1}{6}\left(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}\right). \tag{6.1}$$

Нетрудно заметить, что c_{ijk} представляют собой тензор, так как операция альтернирования, которой мы их получили, сводится к комбинации известных нам тензорных операций подстановки индексов и сложения (вычитания) тензоров (§ 4). Кроме того, из соотношений (6.1) немедленно следует, что c_{ijk} меняет знак при транспозиции двух индексов, так как в правой части первая тройка членов превращается во вторую тройку со знаками + вместо —, а вторая тройка превращается в первую со знаками — вместо +. Таким образом, альтернация по трем индексам дает нам тензор, кососимметрический по этим индексам.

Когда тензор c_{ijk} получен из тензора a_{ijk} по формуле (6.1), *то мы будем говорить, что он получен из a_{ijk} альтернацией по индексам i, j, k; при этом мы будем применять взамен развернутого выражения* (6.1) *краткое обозначение*

$$c_{ijk}=a_{[ijk]}. \tag{6.2}$$

Альтернацию можно производить и над тремя произвольно выбранными индексами многовалентного тензора, например, над первыми тремя индексами тензора a_{ijklm}.

Получаем тензор

$$c_{ijklm}=a_{[ijk]\,lm}, \tag{6.3}$$

причем в правой части над индексами i, j, k проделывается в точности то же самое, что и в правой части (6.1); индексы l, m переписываются при этом без изменения. Полученный в результате