В самом деле, совершенно так же, как и в (5.9), убеждаемся, что наличие двух одинаковых индексов обращает координату нашего тензора в нуль. Между тем, его координаты всегда имеют по меньшей мере два одинаковых индекса, так как индексов у них четыре или больше, а принимать они могут лишь значения 1, 2, 3. Следовательно, все координаты нашего тензора равны нулю.

## § 6. Получение инвариантов с помощью кососимметрических тензоров

Если нам задан трехвалентный тензор $a_{pqr}$ (не обязательно кососимметрический), то мы можем получить из него кососимметрический тензор $c_{ijk}$ путем так называемой операции *альтернации*; а именно, каждая координата $c_{ijk}$ определяется как среднее арифметическое шести координат тензора $a_{pqr}$, индексы при которых получены из $i$, $j$, $k$ всевозможными подстановками (в том числе и тождественной), причем в случае четной подстановки координата берется со своим знаком, а в случае нечетной — с обратным:

$$c_{ijk}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}). \tag{6.1}$$

Нетрудно заметить, что $c_{ijk}$ представляют собой тензор, так как операция альтернирования, которой мы их получили, сводится к комбинации известных нам тензорных операций подстановки индексов и сложения (вычитания) тензоров (§ 4). Кроме того, из соотношений (6.1) немедленно следует, что $c_{ijk}$ меняет знак при транспозиции двух индексов, так как в правой части первая тройка членов превращается во вторую тройку со знаками + вместо —, а вторая тройка превращается в первую со знаками — вместо +. Таким образом, альтернация по трем индексам дает нам тензор, кососимметрический по этим индексам.

*Когда тензор $c_{ijk}$ получен из тензора $a_{ijk}$ по формуле* (6.1), *то мы будем говорить, что он получен из $a_{ijk}$ альтернацией по индексам $i$, $j$, $k$; при этом мы будем применять взамен развернутого выражения* (6.1) *краткое обозначение*

$$c_{ijk}=a_{[ijk]}. \tag{6.2}$$

Альтернацию можно производить и над тремя произвольно выбранными индексами многовалентного тензора, например, над первыми тремя индексами тензора $a_{ijklm}$.

Получаем тензор

$$c_{ijklm}=a_{[ijk]\,lm}, \tag{6.3}$$

причем в правой части над индексами $i$, $j$, $k$ проделывается в точности то же самое, что и в правой части (6.1); индексы $l$, $m$ переписываются при этом без изменения. Полученный в результате тензор является *кососимметрическим по индексам* $i$, $j$, $k$ (т. е. по тем, по которым произведена альтернация).

Альтернацию можно производить *и по двум индексам*, произвольно выбранным в каком-либо (по крайней мере, двухвалентном) тензоре, причем в этом случае она выглядит значительно проще и означает просто *составление полуразности данной координаты и координаты, полученной из нее транспозицией избранных индексов.*

Так, для двухвалентного тензора $a_{ij}$ альтернация по его индексам означает составление тензора

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \tag{6.4}$$

Для четырехвалентного тензора $a_{ijkl}$ альтернация, например, по 2-му и 4-му индексам означает составление тензора

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ijkl} - a_{ilkj}). \tag{6.5}$$

Ясно, что результат альтернации и здесь будет кососимметричен по соответствующим двум индексам $j$, $l$.

Как мы вскоре увидим, альтернация по двум индексам в своем месте играет большую роль, но для составления инвариантов (в трехмерном пространстве) является полезной лишь альтернация по трем индексам. К ней мы и возвращаемся.

Ясно, что, проальтернировав трехвалентный тензор согласно (6.1), мы можем получить его относительный инвариант в виде одной существенной координаты кососимметрического тензора

$$c_{123} = \frac{1}{6}(a_{123} + a_{231} + a_{312} - a_{213} - a_{321} - a_{132}). \tag{6.6}$$

Интересно, что выражение в скобке по способу своего составления весьма напоминает определитель 3-го порядка. И действительно, оно и в самом деле обращается в определитель 3-го порядка, если, в частности, в качестве тензора $a_{ijk}$ взять произведение трех тензоров 1-й валентности:

$$a_{ijk} = x_i y_j z_k. \tag{6.7}$$

Эти тензоры можно всегда считать, как мы знаем, координатами некоторых определенных векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.

Теперь (6.6) принимает вид

$$c_{123} = \frac{1}{6}(x_1 y_2 z_3 + \ldots) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{6.8}$$

Полученный определитель дает смешанное произведение $(\mathbf{xyz})$, если он вычислен в правой координатной системе, и $-(\mathbf{xyz})$, если он вычислен в левой координатной системе. Это соответствует тому, что $c_{123}$ есть *относительный инвариант.*

Однако при помощи кососимметрических тензоров можно составлять и абсолютные инварианты, а не только относительные.

Пусть шестивалентный тензор $c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$ будет кососимметрическим как по индексам первой тройки, так и по индексам второй тройки. Рассмотрим его единственную существенную координату $c_{123123}$. Так как она является относительным инвариантом, если рассматривать ее в зависимости отдельно от первой или отдельно от второй тройки индексов, то при переходе от правой координатной системы к левой (или наоборот) она дважды умножается на $-1$, т. е. не меняется. *Следовательно,* $c_{123123}$ *есть инвариант уже абсолютный.*

Пусть теперь нам задан произвольный шестивалентный тензор $a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$. Проальтернируем его как по первой, так и по второй тройке индексов, в каждом случае по схеме (6.1). Получим тензор

$$c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{[i_1 i_2 i_3]\,[j_1 j_2 j_3]}, \tag{6.9}$$

кососимметрический как по первой, так и по второй тройке индексов. Следовательно, мы можем составить абсолютный инвариант

$$c_{123123} = a_{[123]\,[123]}. \tag{6.10}$$

Особенно важен частный случай, когда этот шестивалентный тензор представляет собой произведение трех одинаковых двухвалентных тензоров:

$$a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3}\,{}^{*}). \tag{6.11}$$

Произведем альтернацию по индексам $j_1$, $j_2$, $j_3$. Получим новый тензор

$$c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{i_1 i_2 i_3\,[j_1 j_2 j_3]} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix}. \tag{6.12}$$

То, что в результате получается именно такой определитель, вытекает из близкого родства процесса альтернации согласно (6.1) и процесса составления определителя, а именно, исходное для альтернации выражение (6.11) представляет собой тот член определителя, который получается произведением элементов по главной диагонали, а в процессе альтернации к нему добавляется не что

---

*) Ради удобства записи мы нарушаем здесь правило (4.7) для расстановки индексов у произведения тензоров; точнее говоря, $a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$ есть произведение тензоров $a_{i_1 j_1}$, $a_{i_2 j_2}$, $a_{i_3 j_3}$, в котором произведена некоторая подстановка индексов.

иное, как остальные члены определителя. Это легко усмотреть, вспомнив правило составления определителя. Впрочем, легко проверить равенство (6.12) и прямой выкладкой, написав результат альтернации в развернутом виде согласно (6.1) и убедившись, что он совпадает с разложением определителя.

В отличие от (6.9) мы произвели здесь альтернацию лишь по одной тройке индексов. Но этого в данном случае достаточно, так как полученный нами тензор (6.12) *будет кососимметричен не только по индексам* $j_1, j_2, j_3$, *по которым мы альтернировали, но и по индексам* $i_1, i_2, i_3$ *тоже.*

В самом деле, взаимная перестановка индексов, например $j_1, j_2$, означает перестановку первых двух столбцов определителя (6.12), а взаимная перестановка индексов, например, $i_1, i_2$, означает перестановку первых двух его строк. И в том и в другом случае определитель умножается на $-1$, чем и доказывается требуемая кососимметричность.

Мы можем теперь составить абсолютный инвариант

$$c_{123123} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\operatorname{Det}|a_{ij}|. \qquad (6.13)$$

*Таким образом, определитель, составленный из координат двухвалентного тензора, есть инвариант преобразования координатной системы.*

Этот результат, впрочем, можно было бы получить и совершенно самостоятельно следующим образом. Запишем закон преобразования координат двухвалентного тензора

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij}.$$

Тогда из правила умножения детерминантов следует, что

$$\operatorname{Det}|a'_{pq}| = \operatorname{Det}|A_{pi}|\cdot\operatorname{Det}|A_{qj}|\cdot\operatorname{Det}|a_{ij}| = \operatorname{Det}|a_{ij}|,$$

так как $\operatorname{Det}|A_{pi}|$ и $\operatorname{Det}|A_{qj}|$ суть детерминанты одной и той же ортогональной матрицы и, следовательно, равны оба или $+1$ или $-1$.

*Инвариант* $\operatorname{Det}|a_{ij}|$ *имеет важный геометрический смысл, а именно, он дает то постоянное отношение, в котором изменяются объемы всех тел при центроаффинном преобразовании*

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x},$$

*где аффинор* $\mathfrak{A}$ *имеет координаты* $a_{ij}$.

Достаточно проверить это утверждение для кубов, так как объем любого тела можно сколь угодно точно приблизить объемом входящего тела, составленного из кубов, и выходящего тела, также составленного из кубов (имеются в виду тела с кусочно гладкой границей).

Возьмем какой-нибудь куб, помещенный для простоты одной вершиной в начале координат $O$, и направим координатные оси

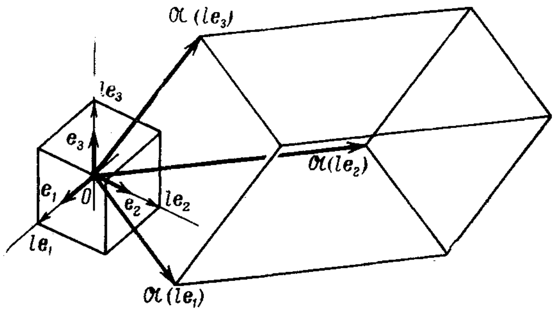


Рис. 2.

по ребрам куба (рис. 2). Тогда можно будет считать, что куб построен на векторах $l\mathbf{e}_1$, $l\mathbf{e}_2$, $l\mathbf{e}_3$, где $l$ — ребро куба. Эти векторы согласно (3.8) перейдут в векторы:

$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_1) = l(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3),$$
$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_2) = l(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3),$$
$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_3) = l(a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3).$$

Куб перейдет в построенный на этих векторах параллелепипед, объем которого $\tilde{V}$ равен, как известно, смешанному произведению векторов, а значит, равен определителю

$$\tilde{V} = \mathrm{Det}\,|\,la_{ij}\,| = l^3 \cdot \mathrm{Det}\,|\,a_{ij}\,|$$

Мы считаем при этом, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют правую тройку; объем $\tilde{V}$ берется со знаком $\pm$ в зависимости от правой или левой ориентации векторов $\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_1)$, $\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_2)$, $\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_3)$, на которых он построен.

Если учесть, что объем куба $V = l^3$, то оказывается, что изменение объема произошло в отношении $\mathrm{Det}\,|\,a_{ij}\,|$. Тем самым и для всякого тела коэффициент объемного расширения (со знаком!) имеет вид

$$\frac{\tilde{V}}{V} = \mathrm{Det}\,|\,a_{ij}\,|. \qquad (6.\ 14)$$

Исходя из инварианта $\mathrm{Det}\,|\,a_{ij}\,|$, можно построить и другие инварианты двухвалентного тензора $a_{ij}$. Для этой цели вычтем из $a_{ij}$ тензор (3.19) с постоянными координатами $\lambda\delta_{ij}$, где $\lambda$ —

произвольное число, и составим детерминант из координат нового двухвалентного тензора

$$\operatorname{Det}|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Мы получаем снова инвариант преобразования координатной системы.

Если развернуть определитель и собрать члены с одинаковыми степенями $\lambda$, то получится, очевидно, кубический многочлен относительно $\lambda$

$$\operatorname{Det}|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3, \tag{6.15}$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_l a_{ll}, \tag{6.16}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \tag{6.17}$$

$$I_3 = \operatorname{Det}|a_{ij}|. \tag{6.18}$$

Так как (6.15) представляет собой инвариант *при любом значении* $\lambda$, то коэффициенты $I_1$, $I_2$, $I_3$ по отдельности также должны являться инвариантами.

При этом инвариант $I_1$ нам уже встречался ранее (см. (4.18)), а инвариант $I_3$ был нами получен в этом параграфе.

Таковы основные *инварианты тензора* $a_{ij}$. Что же касается добавка $-\lambda\delta_{ij}$, то он уже сыграл свою роль и в окончательном результате, как мы видим, не участвует.

## § 7. Симметрический аффинор

Для приложений тензорного исчисления исключительно важную роль играет понятие симметрического аффинора.

Аффинор $\mathfrak{A}$ называется *симметрическим*, если для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ имеет место соотношение

$$\mathbf{x}\mathfrak{A}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'\mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{7.1}$$

Другими словами, скалярное произведение одного вектора на функцию $\mathfrak{A}$ от другого вектора не меняется при перестановке этих векторов между собой.

*Необходимым и достаточным признаком симметричности аффинора служит симметричность матрицы его координат.* В самом деле,