риант $\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j$, полученный в результате полного свертывания тензора a_{ij} с дважды взятым тензором l_i:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = -\sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \sum_i x_i^{(\alpha)} l_i \sum_j x_j^{(\alpha)} l_j + \sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)^2}.$$

Так как $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$, то $\sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$; кроме того, $\sum_i x_i^{(\alpha)} l_i = \mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{l}$, и мы получаем:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \left\{ -(\mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{l})^2 + \mathbf{x}^{(\alpha)^2} \right\}. \tag{7.21}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, дает квадрат расстояния точки с массой $m^{(\alpha)}$ до выбранной нами оси, и мы получаем момент инерции относительно этой оси.

Момент инерции данного твердого тела относительно произвольной оси вращения, проходящей через точку O, получается путем свертывания тензора момента инерции с дважды взятым тензором l_i (направляющие косинусы оси). Собственные направления аффинора $\mathfrak{A}$ с координатами a_{ij} параллельны так называемым главным осям инерции. В них тензор моментов инерции принимает вид (7.16).

§ 8. Разложение аффинора на симметрическую и кососимметрическую части

Рассмотрим произвольный аффинор

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{8.1}$$

Соответствующая координатная запись имеет вид (3.13):

$$y_p = \sum_q a_{pq} x_q. \tag{8.2}$$

Здесь a_{pq} — координаты аффинора, образующие двухвалентный тензор. В правой части (8.2) происходит тензорная операция умножения этого тензора на тензор x_q с последующим свертыванием по двум последним индексам. В результате получается снова тензор, именно, y_p.

Мы хотим теперь детальнее представить себе структуру аффинора $\mathfrak{A}$, разложив его на симметрическую и кососимметрическую части. Для этой цели произведем альтернацию над тензором a_{ij}, т. е. составим новый тензор c_{ij} согласно (6.4):

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \tag{8.3}$$

С другой стороны, составим новый тензор b_{ij}, беря в формуле (8.3) полусумму вместо полуразности:

$$b_{ij}=a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}). \tag{8.4}$$

Здесь $a_{(ij)}$ есть сокращенное обозначение для выражения в правой части. Операция составления тензора $a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$ называется *симметрированием* тензора a_{ij} по его индексам i, j (аналогично тому как операция составления тензора $a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji})$ называется *альтернацией* тензора a_{ij} по его индексам i, j). В обозначениях различие состоит в том, что симметрируемые индексы заключаются в круглые скобки, в то время как альтернируемые — в прямые скобки.

То, что операция (8.4) приводит действительно к тензору, видно из того, что она сводится (не считая деления на 2) к операции сложения двух тензоров, причем второй из них образован из первого также тензорной операцией — подстановкой индексов. Очевидно, тензор b_{ij} будет симметрическим, а c_{ij} — кососимметрическим:

$$b_{ij}=b_{ji}, \quad c_{ij}=-c_{ji}.$$

Складывая тензоры (8.3) и (8.4) почленно, мы видим, что первоначальный тензор a_{ij} можно представить в виде

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}. \tag{8.5}$$

Итак, любой двухвалентный тензор a_{ij} можно разложить на сумму симметрического тензора b_{ij} и кососимметрического тензора c_{ij}.

Такого рода разложение будет единственным. В самом деле, симметрируя какое-либо разложение вида (8.5) почленно, мы получаем, что b_{ij} обязательно выражается формулой (8.4), а альтернируя его, видим, что c_{ij} выражается формулой (8.3).

Обозначим теперь аффиноры, координатами которых служит b_{ij} и c_{ij}, соответственно через $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Тогда (8.5) можно переписать в виде

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}+\mathfrak{C} \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}\mathbf{x}=\mathfrak{B}\mathbf{x}+\mathfrak{C}\mathbf{x}. \tag{8.6}$$

Итак, любой аффинор $\mathfrak{A}$ разлагается на сумму симметрического аффинора $\mathfrak{B}$, выражающего чистую деформацию пространства (§ 7), и кососимметрического аффинора $\mathfrak{C}$ (§ 5), сводящегося к векторному умножению вектора аргумента $\mathbf{x}$ на некоторый постоянный вектор $\mathbf{u}$.

Разложение (8.6) *играет особенно важную роль в одном частном случае, а именно, когда рассматривается аффинор, бесконечно мало отличающийся от единичного.*

Будем рассматривать аффинор $E+\varepsilon\mathfrak{A}$, где E — единичный аффинор (§ 3), $\mathfrak{A}$ — произвольный аффинор, а ε — бесконечно малый множитель. Разумеется, аффинор $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ будет переменным и стремится к единичному аффинору E как к своему пределу при $\varepsilon \to 0$.

Переход к пределу для аффинора можно определить, чтобы не вдаваться в излишние подробности, хотя бы как переход к пределу для каждой из его координат.

Важное значение аффинора вида $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ выяснится несколько позже.

Разложим аффинор $\mathfrak{A}$ на симметрический и кососимметрический аффиноры согласно (8.6). Тогда

$$E+\varepsilon\mathfrak{A}=E+\varepsilon\mathfrak{B}+\varepsilon\mathfrak{C}, \tag{8.7}$$

и соответствующее центроаффинное преобразование запишется в виде

$$\mathbf{y}=(E+\varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{C}\mathbf{x}, \tag{8.8}$$

где $\mathbf{x}$ — произвольный вектор.

Ввиду того что рассматриваемый аффинор бесконечно близок к единичному, формула (8.8) определяет *бесконечно малое* центроаффинное преобразование пространства (если понимать под $\mathbf{x}$, как мы это ранее и делали, радиус-вектор произвольной точки пространства).

Рассмотрим сначала частный случай, когда в (8.7) отсутствует $\mathfrak{C}$, так что речь идет об аффиноре $E+\varepsilon\mathfrak{B}$.

Вместе с E и $\mathfrak{B}$ этот аффинор будет симметрическим и, следовательно, дает чистую деформацию пространства, т. е. его растяжение (сжатие) по трем взаимно ортогональным направлениям.

Координаты аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, очевидно, равны $\delta_{ij}+\varepsilon b_{ij}$, т. е. в подробной матричной записи имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 1+\varepsilon b_{11} & \varepsilon b_{12} & \varepsilon b_{12} \\ \varepsilon b_{21} & 1+\varepsilon b_{22} & \varepsilon b_{23} \\ \varepsilon b_{31} & \varepsilon b_{32} & 1+\varepsilon b_{33} \end{Vmatrix}. \tag{8.9}$$

Чтобы найти собственные направления и собственные значения для аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, достаточно найти их для аффинора $\mathfrak{B}$. В самом деле, пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные значения $\mathfrak{B}$ и пусть $\mathbf{x}$ — вектор, идущий по одному из собственных направлений, например, первому. Тогда

$$(E+\varepsilon\mathfrak{B})\mathbf{x}=E\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\lambda_1\mathbf{x}=(1+\varepsilon\lambda_1)\,\mathbf{x}. \tag{8.10}$$

Следовательно, направление $\mathbf{x}$ будет собственным и для $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ и притом с собственным значением $1+\varepsilon\lambda_1$.

Итак, собственные направления аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ совпадают с собственными направлениями аффинора $\mathfrak{B}$, и соответствующие собственные значения равны $1+\varepsilon\lambda_1$, $1+\varepsilon\lambda_2$, $1+\varepsilon\lambda_3$. Таковы будут коэффициенты бесконечно малого растяжения (сжатия), производимого аффинором $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ по трем взаимно ортогональным собственным направлениям.

Теперь рассмотрим противоположный частный случай, когда в (8.7) отсутствует $\mathfrak{B}$, так что речь идет об аффиноре $E+\varepsilon\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ кососимметричен.

Согласно (5.6) для любого $\mathbf{x}$

$$\mathfrak{C}\mathbf{x} = [\mathbf{ux}],$$

где $\mathbf{u}$ — некоторый постоянный вектор. Следовательно,

$$(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x} = \mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}]. \tag{8.11}$$

Легко заметить, что соответствующее центроаффинное преобразование

$$\mathbf{x} \longrightarrow (E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x} = \mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}] \tag{8.12}$$

означает *поворот около оси, проходящей через O и направленной по $\mathbf{u}$, на бесконечно малый угол* $\varepsilon\,|\mathbf{u}|$.

В самом деле, рассмотрим вращение пространства как твердого тела около точки O с постоянным вектором угловой скорости $\mathbf{u}$. Это значит, что вращение совершается вокруг оси, направленной по $\mathbf{u}$, причем за единицу времени происходит поворот на угол $|\mathbf{u}|$ (против часовой стрелки, если смотреть от конца к началу вектора $\mathbf{u}$).

Как известно из кинематики твердого тела, линейная скорость движения каждой точки M выражается при этом вектором

$$\mathbf{v} = [\mathbf{ux}],$$

где $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор точки M.

За бесконечно малый промежуток времени ε точка M сместится на вектор

$$\varepsilon\mathbf{v} = \varepsilon\,[\mathbf{ux}],$$

если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка. Следовательно, радиус-вектор смещенной точки M' будет:

$$\overrightarrow{OM'} = \mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{v} = \mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}] = (E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}.$$

Итак, переход

$$\overrightarrow{OM} \rightarrow \overrightarrow{OM'},$$

или, что то же,

$$\mathbf{x} \to (E + \varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}, \tag{8.13}$$

означает поворот пространства за бесконечно малое время ε *при векторе угловой скорости* $\mathbf{u}$ (координаты которого определяются согласно (5.3) или (5.7)). Угол этого бесконечно малого поворота равен, очевидно, $\varepsilon\,|\mathbf{u}|$. Этим наше утверждение доказано.

Рассмотрим, наконец, общий случай аффинора (8.7). Подействуем на произвольный вектор $\mathbf{x}$ сначала аффинором $E + \varepsilon\mathfrak{B}$

$$(E + \varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x},$$

а на полученный вектор подействуем аффинором $E + \varepsilon\mathfrak{C}$. Получим:

$$(E + \varepsilon\mathfrak{C})(E + \varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x} = \mathbf{x} + \varepsilon\mathfrak{C}\mathbf{x} + \varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x} + \varepsilon^2\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathbf{x}.$$

Последний член мы отбросим, пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка, и, пользуясь (8.8), получим окончательно:

$$(E + \varepsilon\mathfrak{C})(E + \varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x} \approx (E + \varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}. \tag{8.14}$$

Этот результат показывает, что если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка, аффинор $E + \varepsilon\mathfrak{A}$ *представляет собой результат наложения аффиноров* $E + \varepsilon\mathfrak{B}$ *и* $E + \varepsilon\mathfrak{C}$, *т. е. бесконечно малой чистой деформации и бесконечно малого поворота.* Изменение формы и размеров тел происходит при этом за счет чистой деформации; при повороте, они, конечно, не меняются.

Заметим, что и произвольный аффинор (а не только вида $E + \varepsilon\mathfrak{A}$) можно свести к последовательному выполнению чистой деформации и поворота, и притом совершенно точным образом. Однако доказательство в этом случае будет значительно сложнее, а чистая деформация и поворот уже не отвечают симметрической и кососимметрической частям рассматриваемого аффинора.

Для дальнейшего нам будет необходим коэффициент объемного расширения (6.14) в случае бесконечно малого центроаффинного преобразования

$$\mathbf{y} = (E + \varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}.$$

Согласно (6.14) в нашем случае мы получим:

$$\frac{\tilde{V}}{V} = \operatorname{Det}|\delta_{ij} + \varepsilon a_{ij}| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \varepsilon a_{13} \\ \varepsilon a_{21} & 1 + \varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23} \\ \varepsilon a_{31} & \varepsilon a_{32} & 1 + \varepsilon a_{33} \end{vmatrix} \approx 1 + \varepsilon\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}). \tag{8.15}$$

Здесь при раскрытии определителя мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка.

Мы видим, что коэффициент объемного расширения отличается от 1 на след аффинора $\mathfrak{A}$, умноженный на ε.