§ 9. Тензорные поля

Начиная с этого параграфа, мы переходим из области тензорной алгебры в область тензорного анализа, но по-прежнему в самом простом частном случае: рассматриваем трехмерное евклидово пространство и притом в прямоугольных декартовых координатах. Следует предупредить читателя, что узость нашей точки зрения гораздо более резко будет сказываться после этого перехода. Если о тензорной алгебре и можно составить себе некоторое представление по предыдущим параграфам, то тензорный анализ в широком смысле слова при нашем подходе настолько упрощается, что теряет почти все свое содержание.

Смысл перехода от тензорной алгебры к тензорному анализу заключается в том, что вместо отдельных тензоров мы будем рассматривать тензорные поля, в связи с чем появляется дифференцирование тензоров.

Мы говорим, что нам дано тензорное поле, если в каждой точке M пространства задан некоторый тензор постоянной валентности, но в остальном, вообще говоря, меняющийся от точки к точке. Этот тензор мы будем называть *тензором поля*. Он задается, следовательно, как функция точки M, причем его валентность остается постоянной, например, 3-й:

$$a_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3}(M). \tag{9.1}$$

Эту формулу нужно понимать в том смысле, что координаты тензора зависят от выбора точки M (и, разумеется, от выбора координатной системы, преобразуясь по обычному тензорному закону).

Если мы рассматриваем тензорное поле в определенной координатной системе, то точка M характеризуется своими координатами x_1, x_2, x_3, и формула (9.1) принимает вид

$$a_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3}(x_1,\ x_2,\ x_3), \tag{9.2}$$

т. е. координаты тензора заданы как функции координат точки M.

Мы будем предполагать, что функции (9.2) *непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько нам будем нужно.*

Тензорное поле может быть задано и не во всем пространстве, а лишь в некоторой его области Ω. Это значит, что тензор поля (9.1) определен как функция точки M для всевозможных положений точки M лишь в некоторой области Ω (а не во всем пространстве).

Рассмотрим простейшие частные случаи тензорных полей.

Тензорное *поле нулевой валентности* называется иначе *скалярным полем*. Так как тензор нулевой валентности есть инвариант, то скалярное поле означает задание в каждой точке M некоторой области Ω определенного числа a:

$$a = a\,(M), \tag{9.3}$$

причем $a(M)$ зависит только от выбора точки M, но не зависит от выбора координатной системы. Если зависимость (9.3) записывается в определенной координатной системе, то она принимает вид

$$a = a(x_1, x_2, x_3). \tag{9.4}$$

Примеры скалярных полей: температура неравномерно нагретого тела, имеющая свое значение в каждой его точке; потенциал электростатического поля как функция точки; плотность неоднородного тела, в каждой его точке имеющая свое значение; давление в газовой среде, меняющееся, вообще говоря, от точки к точке, и т. п.

Рассмотрим теперь одновалентное тензорное поле

$$a_i = a_i(M). \tag{9.5}$$

Мы знаем, что координаты одновалентного тензора a_i всегда можно истолковать как координаты некоторого инвариантного вектора $\mathbf{a}$, причем

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i.$$

Поэтому задать поле одновалентного тензора (9.5) все равно, что указать в каждой точке M определенный вектор

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i = \mathbf{a}(M), \tag{9.6}$$

т. е. все равно, что задать векторное поле.

Примеры векторных полей: вектор электрического или магнитного поля; вектор скорости движения жидкой или газовой среды, имеющий в каждой ее точке свое значение; вектор плотности электрического тока в массивном проводнике и т. п. О двухвалентных и т. д. тензорных полях мы будем говорить позже.

Настоящий смысл тензорного исчисления заключается, конечно, в изучении тензорных полей, и для приложений нужны, как правило, именно тензорные поля, а не отдельные тензоры. Поэтому на тензорную алгебру, изложенную в §§ 4, 5, где рассматривались операции над отдельными тензорами, следует смотреть как на необходимый подготовительный материал, а именно, все операции, установленные там для отдельных тензоров, автоматически переносятся и на тензорные поля, если подразумевать, что эти операции производятся над тензорами поля *в каждой точке M области Ω*.

Так, например, сложение тензоров двух полей одинаковой валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M), \quad b_{ijk} = b_{ijk}(M)$$

означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijk}(M) = a_{ijk}(M) + b_{ijk}(M) \tag{9.7}$$

путем сложения тензоров a_{ijk} и b_{ijk} в каждой точке M области Ω.

Аналогично и перемножение тензоров двух полей, например, $a_{ijk}(M)$ и $b_{lm}(M)$, означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijklm}(M) = a_{ijk}(M)\, b_{lm}(M) \tag{9.8}$$

путем перемножения тензоров a_{ijk} и b_{lm} в каждой точке M области Ω.

Аналогично операции свертывания и подстановки индексов производятся над тензором поля в каждой точке M области Ω.

Но помимо алгебраических операций над тензорами поля можно производить еще операцию дифференцирования, которая и определяет лицо тензорного анализа.

§ 10. Дифференцирование тензора поля

Рассмотрим какое-нибудь тензорное поле, для примера, трехвалентное:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M) = a_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{10.1}$$

Нас интересует вопрос (действительно очень важный для приложений): как меняется наш тензор от точки к точке в *бесконечно малой окрестности данной точки* $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Для этой цели мы смещаемся из точки M в произвольную бесконечно близкую точку M'.

Говоря более точно, это бесконечно малое смещение состоит в том, что мы движемся по некоторой параметрически заданной кривой

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \qquad x_3 = x_3(t), \tag{10.2}$$

причем при данном значении t мы находимся в M, а при бесконечно близком значении $t + \Delta t$ попадаем в бесконечно близкую точку M'. Все дифференциалы, которые мы будем выписывать, предполагаются взятыми по отношению к аргументу t.

Функции $x_i(t)$ мы считаем, конечно, непрерывно дифференцируемыми.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M в силу (10.2) выражается формулой

$$\overrightarrow{OM} = \sum_i x_i(t)\, \mathbf{e}_i, \tag{10.3}$$