означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijk}(M) = a_{ijk}(M) + b_{ijk}(M) \tag{9.7}$$

путем сложения тензоров a_{ijk} и b_{ijk} в каждой точке M области Ω.

Аналогично и перемножение тензоров двух полей, например, $a_{ijk}(M)$ и $b_{lm}(M)$, означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijklm}(M) = a_{ijk}(M)\, b_{lm}(M) \tag{9.8}$$

путем перемножения тензоров a_{ijk} и b_{lm} в каждой точке M области Ω.

Аналогично операции свертывания и подстановки индексов производятся над тензором поля в каждой точке M области Ω.

Но помимо алгебраических операций над тензорами поля можно производить еще операцию дифференцирования, которая и определяет лицо тензорного анализа.

§ 10. Дифференцирование тензора поля

Рассмотрим какое-нибудь тензорное поле, для примера, трехвалентное:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M) = a_{ijk}(x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{10.1}$$

Нас интересует вопрос (действительно очень важный для приложений): как меняется наш тензор от точки к точке в *бесконечно малой окрестности данной точки* $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Для этой цели мы смещаемся из точки M в произвольную бесконечно близкую точку M'.

Говоря более точно, это бесконечно малое смещение состоит в том, что мы движемся по некоторой параметрически заданной кривой

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \qquad x_3 = x_3(t), \tag{10.2}$$

причем при данном значении t мы находимся в M, а при бесконечно близком значении $t + \Delta t$ попадаем в бесконечно близкую точку M'. Все дифференциалы, которые мы будем выписывать, предполагаются взятыми по отношению к аргументу t.

Функции $x_i(t)$ мы считаем, конечно, непрерывно дифференцируемыми.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M в силу (10.2) выражается формулой

$$\overrightarrow{OM} = \sum_i x_i(t)\, \mathbf{e}_i, \tag{10.3}$$

а его дифференциал, который дает главную линейную часть вектора смещения $\overrightarrow{MM'}$ и который мы будем обозначать $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$, имеет вид

$$\overrightarrow{d\mathbf{M}} = \sum_l dx_l(t)\,\mathbf{e}_l \approx \overrightarrow{MM'}. \tag{10.4}$$

В силу (10.1) и (10.2) координаты тензора a_{ijk} меняются как сложные функции от t; их дифференциалы при нашем бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$ вычисляются по формулам

$$da_{ijk} = \sum_l \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}\,dx_l. \tag{10.5}$$

Тензор с координатами da_{ijk} *мы будем называть абсолютным дифференциалом тензора поля* a_{ijk} *).

Абсолютный дифференциал da_{ijk} зависит, очевидно, и от точки M и от данного бесконечно малого смещения из M в M'. То, что это действительно тензор, легко проверить. В самом деле, при переходе к новой координатной системе

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i \tag{10.6}$$

координаты тензора a_{ijk} испытывают преобразование

$$a'_{pqr} = \sum_i\sum_j\sum_k A_{pi}A_{qj}A_{rk}a_{ijk}; \tag{10.7}$$

дифференцируя почленно, получим:

$$da'_{pqr} = \sum_i\sum_j\sum_k A_{pi}A_{qj}A_{rk}da_{ijk}, \tag{10.8}$$

так как A_{pi} от выбора точки M не зависят и при переходе от M к M' ведут себя как постоянные.

Таким образом, для da_{ijk} также имеет место тензорный закон преобразования.

Как видно из формулы (10.5), для характеристики изменения тензора a_{ijk} от точки M к любой бесконечно близкой точке M' нужно знать частные производные $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$ от координат тензора a_{ijk} по координатам точки $M(x_1, x_2, x_3)$.

Мы будем обозначать для краткости

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = \nabla_l a_{ijk}. \tag{10.9}$$

---

*) Смысл термина «абсолютный» выяснится позже, когда абсолютный дифференциал будет рассматриваться в криволинейных координатах (вообще говоря, в пространстве аффинной связности, в частности, в евклидовом пространстве).

Выясним, по какому закону будет происходить преобразование этих величин при переходе к новой координатной системе (10.6).

Как мы знаем, при этом переходе старые координаты точки M выражаются через новые согласно (1.13):

$$x_l = \sum_s A_{sl} x'_s. \tag{10.10}$$

Вычислим теперь величины (10.9) в новой координатной системе:

$$\nabla_s a'_{pqr} = \frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x'_s} = \sum_l \frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_s}. \tag{10.11}$$

Последнее выражение получено по правилу дифференцирования функции от функции (можно считать a'_{pqr} функциями от x_1, x_2, x_3, причем эти переменные сами являются функциями от x'_1, x'_2, x'_3 в силу (10.10)). Так как согласно (10.10)

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_s} = A_{sl}$$

и согласно (10.7)

$$\frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x_l} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$$

(A_{pi} — величины постоянные), то окончательно (10.11) принимает вид

$$\nabla_s a'_{pqr} = \sum_l \sum_i \sum_j \sum_k A_{sl} A_{pi} A_{qj} A_{rk} \nabla_l a_{ijk}. \tag{10.12}$$

Мы видим, что $\nabla_l a_{ijk}$ преобразуются как координаты четырехвалентного тензора (при трехвалентном исходном тензоре a_{ijk}).

Наши рассуждения дословно повторяются и при любой валентности исходного тензора. Таким образом, получаем следующий результат. *Совокупность всех частных производных 1-го порядка (например, $\nabla_l a_{ijk}$) от координат тензора поля по координатам x_l той точки, где этот тензор в данный момент рассматривается, образует снова тензор на единицу высшей валентности, а именно, в качестве добавочного индекса появляется индекс той координаты, по которой берется производная.*

Новый тензор $\nabla_l a_{ijk}$ можно построить в любой точке M области Ω, так что по существу мы из тензорного поля a_{ijk} получили новое тензорное поле $\nabla_l a_{ijk}$.

Тензор поля $\nabla_l a_{ijk}$ называется абсолютной производной тензора поля a_{ijk}.

Формулу (10.5) теперь можно переписать в виде

$$da_{ijk} = \sum_l dx_l \nabla_l a_{ijk} \tag{10.13}$$

и понимать в том смысле, что тензор da_{ijk} есть результат свертывания двух тензоров dx_l и $\nabla_l a_{ijk}$.

В качестве простейшего случая рассмотрим дифференцирование скалярного поля

$$a = a(M) = a(x_1, x_2, x_3). \tag{10.14}$$

Абсолютная производная есть одновалентный тензор

$$\nabla_i a = \frac{\partial a}{\partial x_i}. \tag{10.15}$$

Как и всякий одновалентный тензор, $\nabla_i a$ может быть истолкован как вектор с теми же координатами. Этот вектор называется *градиентом скалярного поля*

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, a = \sum_i \nabla_i a \cdot \mathbf{e}_i. \tag{10.16}$$

Формула (10.13) принимает вид

$$da = \sum_l dx_l \cdot \nabla_l a = \overrightarrow{d\mathbf{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, a. \tag{10.17}$$

Последняя запись в виде скалярного произведения легко получается при помощи формул (10.4) и (10.16).

Итак, дифференциал скаляра $a(M)$ при бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$ равен скалярному произведению дифференциала радиуса-вектора $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$ на градиент скалярного поля.

Градиент скалярного поля определяется, разумеется, в каждой точке области Ω, в которой скалярное поле задано, и *образует векторное поле.*

Приведем примеры.

1°. Силовое поле $\mathbf{F}(M)$ (где $\mathbf{F}(M)$ — напряженность поля, т. е. сила, действующая в точке M на единицу заряда (массы)) называется *потенциальным*, если $\mathbf{F}(M)$ в каждой точке есть градиент некоторого скалярного поля $a(M)$:

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, a. \tag{10.18}$$

Функция $a(M)$ называется *потенциальной функцией* данного силового поля и лишь знаком отличается от его потенциала.

Физический смысл формулы (10.17) состоит в том, что *приращение потенциальной функции при бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$*

равно работе, производимой силой поля при этом же смещении над единицей заряда (массы). Правда, в формуле (10.17) выписаны не сами названные величины, а их главные линейные части, но если (10.17) почленно проинтегрировать по какому-либо пути, то наше утверждение оправдается, и притом для любого конечного пути (а не только для бесконечно малого).

2°. Рассматриваем скалярное поле $a(M)$, где $a(M)$ выражает давление в произвольной точке идеальной жидкости, заполняющей некоторую область Ω. Тогда $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a$ имеет следующий физический смысл: вектор

$$\mathbf{F} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a\, d\omega \tag{10.19}$$

выражает равнодействующую сил давления, приложенных к элементарному объему $d\omega$.

3°. Скалярное поле $a(M)$ выражает температуру в различных точках однородного, но неравномерно нагретого тела. Здесь вектор

$$\mathbf{F} = -k\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a \tag{10.20}$$

выражает плотность теплового потока, идущего от более теплых, к более холодным местам тела; k — коэффициент теплопроводности. Более подробно, роль вектора $\mathbf{F}$ состоит в том, что тепловой поток в каждой точке идет по его направлению, причем через ортогональный к $\mathbf{F}$ элемент площади $d\sigma$ за единицу времени проходит количество тепла, равное $|\mathbf{F}|\,d\sigma$.

§ 11. Дифференцирование одновалентного тензора

Пусть в некоторой области Ω нам дано одновалентное тензорное поле

$$a_i = a_i(M) = a_i(x_1, x_2, x_3), \tag{11.1}$$

или, что то же самое, векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = \sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i. \tag{11.2}$$

Его дифференцирование, которым мы сейчас займемся, исключительно важно для приложений. Формулы (10.5), (10.13) для нашего случая примут вид

$$da_i = \sum_l \frac{\partial a_i}{\partial x_l}\,dx_l = \sum_l \nabla_l a_i dx_l. \tag{11.3}$$