равно работе, производимой силой поля при этом же смещении над единицей заряда (массы). Правда, в формуле (10.17) выписаны не сами названные величины, а их главные линейные части, но если (10.17) почленно проинтегрировать по какому-либо пути, то наше утверждение оправдается, и притом для любого конечного пути (а не только для бесконечно малого).

2°. Рассматриваем скалярное поле $a(M)$, где $a(M)$ выражает давление в произвольной точке идеальной жидкости, заполняющей некоторую область Ω. Тогда $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a$ имеет следующий физический смысл: вектор

$$\mathbf{F} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a\, d\omega \tag{10.19}$$

выражает равнодействующую сил давления, приложенных к элементарному объему $d\omega$.

3°. Скалярное поле $a(M)$ выражает температуру в различных точках однородного, но неравномерно нагретого тела. Здесь вектор

$$\mathbf{F} = -k\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, a \tag{10.20}$$

выражает плотность теплового потока, идущего от более теплых, к более холодным местам тела; k — коэффициент теплопроводности. Более подробно, роль вектора $\mathbf{F}$ состоит в том, что тепловой поток в каждой точке идет по его направлению, причем через ортогональный к $\mathbf{F}$ элемент площади $d\sigma$ за единицу времени проходит количество тепла, равное $|\mathbf{F}|\,d\sigma$.

§ 11. Дифференцирование одновалентного тензора

Пусть в некоторой области Ω нам дано одновалентное тензорное поле

$$a_i = a_i(M) = a_i(x_1, x_2, x_3), \tag{11.1}$$

или, что то же самое, векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = \sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i. \tag{11.2}$$

Его дифференцирование, которым мы сейчас займемся, исключительно важно для приложений. Формулы (10.5), (10.13) для нашего случая примут вид

$$da_i = \sum_l \frac{\partial a_i}{\partial x_l}\,dx_l = \sum_l \nabla_l a_i\,dx_l. \tag{11.3}$$

Абсолютная производная представляет собой в нашем случае поле двухвалентного тензора, координаты которого мы обозначим:

$$a_{il}=\nabla_l a_i=\frac{\partial a_i}{\partial x_l}. \tag{11.4}$$

Вводя обозначение a_{il} для координат тензора, мы сознательно сделали так, чтобы индекс дифференцирования занимал второе место.

Двухвалентному тензору a_{il} всегда отвечает, как мы знаем, аффинор $\mathfrak{A}$ с теми же координатами a_{il}. Вместе с тензором a_{il} аффинор $\mathfrak{A}$ определится в каждой точке M, так что мы получаем *аффинорное поле*

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(M). \tag{11.5}$$

Итак, абсолютной производной вектора поля $\mathbf{a}(M)$ *можно считать аффинор поля* $\mathfrak{A}(M)$, *где координаты аффинора определяются через координаты вектора по формуле*

$$a_{il}=\frac{\partial a_i}{\partial x_l}. \tag{11.6}$$

Этот аффинор мы будем называть *производным аффинором* векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

Перепишем теперь (11.3) в виде

$$da_i=\sum_l a_{il}\,dx_l, \tag{11.7}$$

где дифференциалы взяты при произвольном смещении из данной точки M в бесконечно близкую точку M'. При этом согласно (10.4) dx_l—координаты вектора $\overrightarrow{d\mathbf{M}}\approx\overrightarrow{MM'}$, а da_i—координаты вектора $\overrightarrow{d\mathbf{a}}$, что легко получить, дифференцируя (11.2) почленно:

$$\overrightarrow{d\mathbf{a}}=\sum_i da_i\mathbf{e}_i.$$

В таком случае (11.7) можно переписать в виде

$$\overrightarrow{d\mathbf{a}}=\mathfrak{A}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}}. \tag{11.8}$$

В самом деле, (11.7) можно рассматривать согласно (3.13) как координатную запись действия аффинора $\mathfrak{A}$ на вектор $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$, причем получается вектор $d\mathbf{a}$.

Итак, абсолютная производная $\mathfrak{A}(M)$, *действуя на вектор* $\overrightarrow{d\mathbf{M}}\approx\overrightarrow{MM'}$, *дает вектор* $d\mathbf{a}(M)\approx\Delta\mathbf{a}(M)$. *Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно сказать, что* $\mathfrak{A}(M)$, *действуя на* *вектор бесконечно малого смещения $\overrightarrow{MM'}$, дает соответствующее приращение вектора поля* $\mathbf{a}(M)$:

$$\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M) = \Delta\mathbf{a}(M) = \mathfrak{A}\mathbf{z}, \tag{11.9}$$

где $\mathbf{z} = \overrightarrow{MM'}$.

Аффинор $\mathfrak{A}(M)$ можно разложить (§ 8) на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\mathfrak{A}(M) = \mathfrak{B}(M) + \mathfrak{C}(M), \tag{11.10}$$

причем координаты a_{ij} разложатся соответственно

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}. \tag{11.11}$$

Здесь

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right), \tag{11.12}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{11.13}$$

Формула (11.8) принимает вид

$$d\mathbf{a} = \mathfrak{B}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}} + \mathfrak{C}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}}. \tag{11.14}$$

Действие аффинора $\mathfrak{C}$ можно заменить согласно (5.6) векторным умножением (слева) на определенный вектор $\mathbf{u}$, координаты которого в правой координатной системе выражаются через координаты аффинора по формулам (5.3). В нашем случае эти формулы принимают вид (после почленного умножения на 2, что будет для нас удобно в дальнейшем):

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 &= -2c_{23} = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \\ 2u_2 &= -2c_{31} = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \\ 2u_3 &= -2c_{12} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

Формулу (11.14) можно теперь переписать следующим образом:

$$d\mathbf{a} = \mathfrak{B}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}} + [\mathbf{u}\,d\mathbf{M}]. \tag{11.16}$$

Так как вектор $\mathbf{u}$ определяется вместе с аффинором $\mathfrak{C}(M)$ в каждой точке M области Ω, то он образует векторное поле

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(M),$$

порожденное, как мы видим, исходным векторным полем $\mathbf{a}(M)$.

Удвоенный вектор $\mathbf{u}(M)$ *называется ротором векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Итак:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = 2\mathbf{u} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)+\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)+\mathbf{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \qquad (11.17)$$

Мы пользовались здесь формулами (11.15)

В правильности последней записи $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в виде символического определителя 3-го порядка нетрудно убедиться, развертывая его по элементам первой строки.

Что касается симметрического аффинора $\mathfrak{B}(M)$, то он не может быть охарактеризован столь же просто, как $\mathfrak{C}(M)$. Во многих приложениях играет роль не столько он сам, сколько его след $\sum_i b_{ii}$, совпадающий, между прочим, со следом аффинора $\mathfrak{A}(M)$, т. е. с $\sum_i a_{ii}$. Действительно,

$$\sum_i a_{ii}=\sum_i (b_{ii}+c_{ii})=\sum_i b_{ii}, \text{ так как } c_{ii}=0.$$

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ есть инвариант, зависящий вместе с самим аффинором от выбора точки M.

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ *называется дивергенцией исходного векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{div}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\sum_i a_{ii}=\sum_i b_{ii}=\sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \qquad (11.18)$$

Дивергенция образует, таким образом, скалярное поле, порожденное данным векторным полем $\mathbf{a}(M)$.

§ 12. Кинематическое истолкование векторного поля и его производного аффинора

Построения предыдущего параграфа получают наглядный кинематический смысл, если исходному векторному полю

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)=\sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i. \qquad (12.1)$$

придать следующее истолкование. *Пусть область* Ω, *в которой задано векторное поле, заполнена некоторой подвижной деформирующейся средой, например жидкостью, и пусть вектор* $\mathbf{a}(M)$ *выражает ту скорость, с которой движется частица жидкости, находящаяся в данный момент в точке* M.