Удвоенный вектор $\mathbf{u}(M)$ *называется ротором векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Итак:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=2\mathbf{u}=\mathbf{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)+\mathbf{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)+\mathbf{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)=$$
$$=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}. \tag{11.17}$$

Мы пользовались здесь формулами (11.15)

В правильности последней записи $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в виде символического определителя 3-го порядка нетрудно убедиться, развертывая его по элементам первой строки.

Что касается симметрического аффинора $\mathfrak{B}(M)$, то он не может быть охарактеризован столь же просто, как $\mathfrak{C}(M)$. Во многих приложениях играет роль не столько он сам, сколько его след $\sum\limits_i b_{ii}$, совпадающий, между прочим, со следом аффинора $\mathfrak{A}(M)$, т. е. с $\sum\limits_i a_{ii}$. Действительно,

$$\sum_i a_{ii}=\sum_i (b_{ii}+c_{ii})=\sum_i b_{ii},\quad \text{так как } c_{ii}=0.$$

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ есть инвариант, зависящий вместе с самим аффинором от выбора точки M.

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ *называется дивергенцией исходного векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *и обозначается* $\operatorname{div}\mathbf{a}$:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\sum_i a_{ii}=\sum_i b_{ii}=\sum_i\frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \tag{11.18}$$

Дивергенция образует, таким образом, скалярное поле, порожденное данным векторным полем $\mathbf{a}(M)$.

§ 12. Кинематическое истолкование векторного поля и его производного аффинора

Построения предыдущего параграфа получают наглядный кинематический смысл, если исходному векторному полю

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)=\sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i. \tag{12.1}$$

придать следующее истолкование. *Пусть область* Ω, *в которой задано векторное поле, заполнена некоторой подвижной деформирующейся средой, например жидкостью, и пусть вектор* $\mathbf{a}(M)$ *выражает ту скорость, с которой движется частица жидкости, находящаяся в данный момент в точке* M.

Для простоты движение жидкости будем считать *стационарным*, т. е. поле скоростей $\mathbf{a}(M)$ не зависящим от времени.

Спрашивается, какой кинематический смысл получает производный аффинор $\mathfrak{A}$ нашего векторного поля.

Для этой цели мы проследим, что делается с бесконечно малой «каплей» жидкости в процессе ее движения. Вырежем из жидкости шарик с центром в какой-нибудь точке M и с бесконечно малым радиусом ρ. С течением времени жидкость, заключенная в этом шарике, перемещается с общим потоком жидкости, одновременно вращаясь и деформируясь. Этот процесс мы и проследим.

Каждая точка, увлекаемая потоком жидкости,— мы ее будем кратко называть «частицей жидкости» — описывает с течением времени t определенную траекторию

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t). \tag{12.2}$$

При этом проекции вектора скорости на координатные оси равны, как известно, $\frac{dx_i}{dt}$ $(i = 1, 2, 3)$. С другой стороны, вектор скорости совпадает в каждой точке M с вектором поля $\mathbf{a}(M)$, и его проекции равны $a_i(M)$, т. е. $a_i(x_1, x_2, x_3)$. В результате

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{12.3}$$

Таким образом, функции (12.2) должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений (12.3).

Частица жидкости, находящаяся в данный момент в точке M, спустя бесконечно малый промежуток времени ε сместится на вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$, если пренебрегать бесконечно малыми высшего порядка.

В самом деле, скорость движения частицы жидкости в данный момент выражается вектором $\mathbf{a}(M)$, и если бы эта скорость оставалась постоянной, то за время ε смещение частицы точно выразилось бы вектором $\varepsilon\mathbf{a}(M)$.

Но так как скорость движения частицы зависит от ее положения, то в процессе движения скорость будет, вообще говоря, меняться. Однако за бесконечно малый промежуток времени она успевает измениться, начиная от значения $\mathbf{a}(M)$, лишь на бесконечно малую величину. В результате $\varepsilon\mathbf{a}(M)$ дает смещение с ошибкой бесконечно малой высшего порядка (грубо говоря, бесконечно малая ошибка в скорости умножается еще на ε).

Будем рассматривать смещения всех частиц жидкости за бесконечно малый промежуток времени ε, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка относительно ε. Тогда эти смещения можно считать равными $\varepsilon\mathbf{a}(M)$, где M — начальное положение частицы жидкости.

Пусть M' — какая-нибудь точка в шарике бесконечно малого радиуса ρ с центром в M. Подвергнем все точки шарика указанному смещению; в частности, точки M, M' переходят в некоторые точки L, L' (рис. 3).

При этом, как мы знаем,

$$\overrightarrow{ML} \approx \varepsilon \mathbf{a}(M), \quad \overrightarrow{M'L'} \approx \varepsilon \mathbf{a}(M'). \tag{12.4}$$

Нас интересует, что произошло в результате смещения с вектором $\overrightarrow{MM'}$, ведущим из центра шарика M в его произвольную точку M'. Очевидно, он перейдет в вектор $\overrightarrow{LL'}$, который можно представить в следующем виде:

$$\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'L'} = \overrightarrow{MM'} + (\overrightarrow{M'L'} - \overrightarrow{ML}) \approx$$
$$\approx \overrightarrow{MM'} + \varepsilon(\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)). \tag{12.5}$$

В дальнейшем мы пренебрегаем бесконечно малыми высшего порядка не только относительно ε, но и относительно ρ тоже. Это нужно оговорить особо, так как ε и ρ — независимые друг от друга бесконечно малые. Тогда можно принять согласно (11.9)

$$\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M) = \Delta \mathbf{a}(M) \approx \mathfrak{A}\mathbf{z},$$

где $\mathbf{z}$ — краткое обозначение для $\overrightarrow{MM'}$. Теперь (12.5) дает:

$$\overrightarrow{LL'} \approx \mathbf{z} + \varepsilon \mathfrak{A}\mathbf{z} = (E + \varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{z}. \tag{12.6}$$

Итак, преобразование вектора $\overrightarrow{MM'}$ в вектор $\overrightarrow{LL'}$ происходит (с указанной степенью точности) посредством аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — производный аффинор векторного поля скоростей, а ε — протекший бесконечно малый промежуток времени.

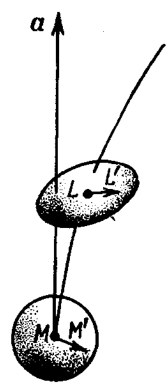

Рис. 3.

Другими словами, бесконечно малые векторы, исходящие из центра M первоначальной «капли» (т. е. нашего шарика радиуса ρ), переходят в векторы, исходящие из центра L смещенной (и деформированной) капли, подвергаясь действию аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{A}$. Но действие такого аффинора, как мы знаем (§ 8), сводится к чистой деформации, порождаемой аффинором $E + \varepsilon\mathfrak{B}$, и к повороту посредством аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{C}$. При этом $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — симметрическая и кососимметрическая части аффинора $\mathfrak{A}$. В нашем случае их координаты выражаются согласно (11.12) и (11.13), так как у нас $\mathfrak{A}(M)$ — производный аффинор векторного поля $\mathbf{a}(M)$.

В результате бесконечно малая шаровая капля жидкости за бесконечно малый промежуток времени ε подвергается (помимо параллельного сдвига вместе со своим центром M на вектор $\overrightarrow{ML} \approx \varepsilon\mathbf{a}(M)$), во-первых, бесконечно малой чистой деформации $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, т. е. растяжению (сжатию) по трем взаимно ортогональным направлениям, превращаясь из шара в эллипсоид, и, во-вторых, вращению $E+\varepsilon\mathfrak{C}$. В силу (8.13) это вращение происходит с вектором угловой скорости $\mathbf{u}$, который согласно (11.17) равен в нашем случае $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Вращение любой бесконечно малой капли жидкости в процессе ее движения происходит с (переменным) вектором угловой скорости, равным в каждой точке $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — векторное поле скоростей.

Аффинор $\mathfrak{B}$ называется аффинором скоростей деформации, а соответствующий тензор

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \tag{12.7}$$

— тензором скоростей деформации.

Как отмечалось в § 8, коэффициент объемного расширения при действии аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ равен (согласно (8.15)):

$$\frac{\tilde{V}}{V} = 1 + \varepsilon\sum_i a_{ii}.$$

Но в нашем случае в силу формулы (11.18)

$$\sum_i a_{ii} = \operatorname{div}\mathbf{a},$$

и следовательно,

$$\frac{\tilde{V}}{V} = 1 + \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Отсюда видно, что в процессе движения жидкости относительное объемное расширение θ каждой ее бесконечно малой капли за бесконечно малый промежуток времени ε равно $\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}$ (т. е. происходит со скоростью $\operatorname{div}\mathbf{a}$):

$$\theta \approx \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a} = \varepsilon\sum_i b_{ii} \quad \left(\text{где } \theta = \frac{\tilde{V}-V}{V}\right). \tag{12.8}$$

В этом и заключается кинематический смысл дивергенции векторного поля.

Отметим важные частные случаи.

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *соленоидальным*, если

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0. \tag{12.9}$$

В нашем кинематическом истолковании это означает, что объемное расширение происходит с нулевой скоростью, т. е. любая пространственная область, заполненная частицами жидкости в начальный момент, с течением времени смещается и деформируется, не меняя своего объема (строго говоря, это показано у нас лишь для бесконечно малых капель жидкости, и переход к конечному объему требовал бы еще некоторых рассуждений). Таким образом, условие (12.9) при кинематическом истолковании векторного поля $\mathbf{a}(M)$ означает *несжимаемость жидкости*.

Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *потенциальным*, если $\mathbf{a}(M)$ представляет собой градиент некоторого скалярного поля

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} a(M). \tag{12.10}$$

Согласно (10.16) координаты вектора $\mathbf{a}(M)$ выражаются формулами:

$$a_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{12.11}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что для потенциального поля $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ (вычисляемый по формуле (11.17)) тождественно равен нулю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \tag{12.12}$$

Возвращаясь к кинематическому истолкованию, рассмотрим случай *потенциального поля скоростей* $\mathbf{a}(M)$. Тогда обращение в нуль $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ означает, что вращение любой бесконечно малой капли жидкости происходит с нулевой угловой скоростью, т. е. в каждый бесконечно малый промежуток времени капля испытывает лишь смещение и чистую деформацию. Движение жидкости — незавихренное. Условие (12.12), т. е. незавихренность движения жидкости, является и достаточным для того, чтобы поле скоростей было потенциальным, по крайней мере, в любой односвязной области Ω. Действительно, из (12.12) в силу формулы (11.17) вытекает:

$$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0, \tag{12.13}$$

а при этих условиях в односвязной области всегда можно подобрать скалярное поле $a(M)$ такое, что a_i выражаются согласно (12.11), т. е.

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} a(M).$$