§ 13. Малая деформация твердого тела

Все, что было сделано в § 12 для течения жидкости, применимо в известном смысле и для малой деформации твердого тела. Аналогично предыдущему мы будем представлять себе, что $\mathbf{a}(M)$ есть поле скоростей, но теперь уже частиц твердого тела.

Однако перемещение частиц твердого тела мы будем допускать лишь в течение некоторого малого промежутка времени ε, в результате чего получается малое, но конечное смещение каждой точки M на вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$. Это малое смещение точек твердого тела мы и будем рассматривать.

Итак, разница по сравнению с трактовкой течения жидкости заключается в следующем. Раньше промежуток времени ε был бесконечно малым, т. е. стремящейся к нулю переменной величиной. Теперь ε — малая постоянная величина. Раньше за время ε происходила лишь бесконечно малая доля неограниченно продолжающегося процесса течения жидкости. Теперь за малый промежуток времени ε происходит и заканчивается весь процесс смещения частиц твердого тела. Добавим к этому, что в данном случае нас интересует не сам процесс смещения, а только его результат, т. е. тот факт, что каждая точка M сместилась на малый вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$.

Если мы говорим все-таки о *процессе* смещения, то в сущности лишь условно, чтобы подогнать наши построения под предыдущие результаты и не повторять снова почти тех же рассуждений. Строго говоря, нас интересует лишь векторное поле окончательных перемещений, которое мы будем обозначать:

$$\mathbf{w}(M) = \varepsilon\mathbf{a}(M). \qquad (13.1)$$

Разделение же $\mathbf{w}(M)$ на множители ε и $\mathbf{a}(M)$, как было сказано, является по существу условным.

Несмотря на то, что ε уже не бесконечно малая величина, мы по-прежнему будем пренебрегать малыми второго порядка относительно ε. При достаточно малых деформациях твердого тела это приближение является практически допустимым, и на нем основывается простейшая (линейная) форма теории упругости.

В таком случае результаты § 12 переносятся и на наш случай, а именно, мысленно вырезанный из твердого тела бесконечно малый шарик радиуса ρ с центром в точке M испытывает (помимо параллельного сдвига вместе со своим центром на вектор $\mathbf{w}(M)$), во-первых, чистую деформацию $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, во-вторых, поворот $E+\varepsilon\mathfrak{C}$. Оба аффинора применяются к бесконечно малым векторам, исходящим из центра шарика.

При этом здесь играют роль лишь те малые добавки $\varepsilon\mathfrak{B}$, $\varepsilon\mathfrak{C}$, которые делаются к единичному аффинору E, а не $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ в чистом виде.

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \varepsilon\mathfrak{A}, \quad \tilde{\mathfrak{B}} = \varepsilon\mathfrak{B}, \quad \tilde{\mathfrak{C}} = \varepsilon\mathfrak{C}. \tag{13.2}$$

Соответственно обозначим координаты этих аффиноров:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a}_{ij} &= \varepsilon a_{ij} = \varepsilon \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, \\ \tilde{b}_{ij} &= \varepsilon b_{ij} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right), \\ \tilde{c}_{ij} &= \varepsilon c_{ij} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \end{aligned}\right\} \tag{13.3}$$

Мы воспользовались здесь формулами (11.12), (11.13).

Так как $\varepsilon\mathbf{a}(M) = \mathbf{w}(M)$, а значит, $\varepsilon a_i = w_i$, то окончательно получаем:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j}, \tag{13.4}$$

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \tag{13.5}$$

$$\tilde{c}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right). \tag{13.6}$$

Так выражаются через вектор поля перемещений $\mathbf{w}(M)$ *координаты аффиноров* $\tilde{\mathfrak{A}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\mathfrak{C}}$, *причем чистая деформация и вращение бесконечно малого шарика с центром в точке* M *вызываются соответственно аффинорами* $E + \tilde{\mathfrak{B}}$, $E + \tilde{\mathfrak{C}}$ *(воздействующими на всевозможные бесконечно малые векторы, отложенные из точки* M *внутри этого шарика).*

Аффинор $\tilde{\mathfrak{B}}$ называется *аффинором деформаций* и соответствующий тензор $\tilde{b}_{ij}$ — *тензором деформаций*. Если предположить тело упругим, то упругие силы, развивающиеся в нем, определяются в каждой точке тензором деформаций, так как аффинор $E + \tilde{\mathfrak{C}}$ создает лишь поворот, а следовательно, не меняет взаимного расположения частиц тела в пределах вырезанного нами бесконечно малого шарика.

В формулах (13.3), (13.4) малый множитель ε включен в рассматриваемые величины и в явном виде не выписывается. Поэтому нужно просто помнить, что координаты w_i вектора перемещения $\mathbf{w}$ и их частные производные $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ мы считаем величинами малыми, так что их квадратами можно пренебрегать (сравнительно с 1). Очевидно, то же относится и к координатам тензоров $\tilde{b}_{ij}$ и $\tilde{c}_{ij}$.

Отметим еще, что относительное объемное расширение будет равно в нашем случае (согласно (12.8) и принимая во внимание соотношение (13.1)):

$$\theta \approx \operatorname{div} \mathbf{w}(M). \tag{13.7}$$

При этом, умножая почленно (11.18) на ε, мы имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_i \tilde{a}_{ii} = \sum_i \tilde{b}_{ii} = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \tag{13.8}$$

§ 14. Тензор напряжений

Пусть упругое тело подверглось некоторой деформации, и в нем появились упругие напряжения. Это означает следующее.

Рассмотрим какую-нибудь плоскую площадку, мысленно внесенную нами внутрь упругого тела и там как-либо установленную. Проведем нормаль к этой площадке и выберем какое-либо из двух направлений на нормали за положительное. Площадку мы в этом случае будем называть *ориентированной*.

Вблизи данной ориентированной площадки упругое тело будет рассечено ею на две части: одна из них расположена с положительной стороны площадки (т. е. в сторону положительного направления нормали), другая — с отрицательной стороны.

Наличие в теле напряжений означает, что первая из этих частей действует на вторую через отделяющую их площадку с известной силой. Эту силу мы будем называть *силой напряжения*, действующей на данную ориентированную площадку. Разумеется, вторая часть тела также действует на первую (по закону равенства действия и противодействия), но, чтобы при подсчете силы напряжения не сбиваться в знаке, мы условимся рассматривать действие именно первой части на вторую.

Охарактеризовать напряжения, существующие в теле, значит уметь установить силу напряжения для любой ориентированной площадки, указанной в теле.

Однако наша постановка вопроса является слишком грубой и нуждается в уточнении. Дело в том, что сила, действующая на площадку, большей частью непрерывно по ней распределена, и это распределение также должно быть указано.

Другими словами, мы должны указать силу, приложенную к каждому элементу (к каждому бесконечно малому кусочку) нашей площадки.

Это показывает нам, что нет смысла класть в основу рассмотрение конечных площадок, а нужно ограничиться площадками бесконечно малыми. Так мы и поступим.

Выберем произвольно какую-нибудь точку M в рассматриваемом теле и будем проводить через нее всевозможные ориентированные бесконечно малые площадки. Каждую из этих площадок мы будем