соотношение (13.1)):

$$\theta \approx \operatorname{div} \mathbf{w}(M). \tag{13.7}$$

При этом, умножая почленно (11.18) на ε, мы имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_i \tilde{a}_{ii} = \sum_i \tilde{b}_{ii} = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \tag{13.8}$$

§ 14. Тензор напряжений

Пусть упругое тело подверглось некоторой деформации, и в нем появились упругие напряжения. Это означает следующее.

Рассмотрим какую-нибудь плоскую площадку, мысленно внесенную нами внутрь упругого тела и там как-либо установленную. Проведем нормаль к этой площадке и выберем какое-либо из двух направлений на нормали за положительное. Площадку мы в этом случае будем называть *ориентированной*.

Вблизи данной ориентированной площадки упругое тело будет рассечено ею на две части: одна из них расположена с положительной стороны площадки (т. е. в сторону положительного направления нормали), другая — с отрицательной стороны.

Наличие в теле напряжений означает, что первая из этих частей действует на вторую через отделяющую их площадку с известной силой. Эту силу мы будем называть *силой напряжения*, действующей на данную ориентированную площадку. Разумеется, вторая часть тела также действует на первую (по закону равенства действия и противодействия), но, чтобы при подсчете силы напряжения не сбиваться в знаке, мы условимся рассматривать действие именно первой части на вторую.

Охарактеризовать напряжения, существующие в теле, значит уметь установить силу напряжения для любой ориентированной площадки, указанной в теле.

Однако наша постановка вопроса является слишком грубой и нуждается в уточнении. Дело в том, что сила, действующая на площадку, большей частью непрерывно по ней распределена, и это распределение также должно быть указано.

Другими словами, мы должны указать силу, приложенную к каждому элементу (к каждому бесконечно малому кусочку) нашей площадки.

Это показывает нам, что нет смысла класть в основу рассмотрение конечных площадок, а нужно ограничиться площадками бесконечно малыми. Так мы и поступим.

Выберем произвольно какую-нибудь точку M в рассматриваемом теле и будем проводить через нее всевозможные ориентированные бесконечно малые площадки. Каждую из этих площадок мы будем характеризовать, во-первых, единичным вектором $\mathbf{n}$, направленным по ее нормали в положительную сторону, и, во-вторых, ее площадью dS. При этом мы представляем себе дело так, что вектор $\mathbf{n}$ является для данной площадки постоянным; следовательно, ортогональная к $\mathbf{n}$ плоскость, проходящая через M, в которой расположена площадка, тоже постоянная, но сама площадка — переменная и стремится стянуться в точку M; при этом $dS \longrightarrow 0$.

Форма площадки нас интересовать не будет.

Более коротко нашу площадку можно задать одним бесконечно малым вектором

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}dS, \tag{14.1}$$

по которому, очевидно, можно определить и $\mathbf{n}$, и dS ($\mathbf{n}$ — как единичный вектор того же направления, а dS — как модуль).

Обозначим $\mathbf{F}$ силу напряжения, действующую на площадку $\mathbf{s}$. Естественно предположить, что в данной точке M и при данном $\mathbf{n}$ сила $\mathbf{F}$, действующая на площадку, пропорциональна (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка) ее площади dS.

Тем самым сила $\mathbf{F}$ не зависит от формы площадки и вполне определяется вектором площадки $\mathbf{s}$, причем при умножении $\mathbf{s}$ на число на то же число умножается и $\mathbf{F}$. Итак, $\mathbf{F}$ мы должны искать как функцию от $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s}), \tag{14.2}$$

учитывая, что для всякого числа α

$$\mathfrak{F}(\alpha\mathbf{s}) = \alpha\mathfrak{F}(\mathbf{s}). \tag{14.3}$$

Последнее показывает, что достаточно знать $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$, чтобы определить и $\mathfrak{F}(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s}) = \mathfrak{F}(\mathbf{n}\,dS) = \mathfrak{F}(\mathbf{n})\,dS. \tag{14.4}$$

Кроме того, отсюда видно, $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$ выражает силу напряжения на данной площадке, отнесенную к единице площади, т. е. *напряжение* $\mathbf{P}$ *на данной площадке*. Итак,

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}\,dS. \tag{14.5}$$

Характер зависимости $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$ выводится в курсах теории упругости из некоторых механических соображений, которые мы повторять здесь не будем. Воспользуемся готовым результатом*), а именно, оказывается, что в произвольной координатной системе проекции напряжения $\mathbf{P} = \mathfrak{F}(\mathbf{n})$ на координатные оси выражаются линейно через направляющие косинусы положительной нормали $\mathbf{n}$, т. е. в наших

[1]) См., например, М. М. Филоненко-Бородич, Теория упругости изд. 3-е, Гостехиздат, М.—Л., 1947, § 3, формулы (1.8).

обозначениях через координаты n_1, n_2, n_3 единичного вектора $\mathbf{n}$:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= f_{11}n_1 + f_{12}n_2 + f_{13}n_3, \\ P_2 &= f_{21}n_1 + f_{22}n_2 + f_{23}n_3, \\ P_3 &= f_{31}n_1 + f_{32}n_2 + f_{33}n_3. \end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

Мы обозначили f_{11}, f_{12}, ... напряжения X_x, X_y, ... на площадках, параллельных координатным осям. В данной координатной системе и в данной точке M это будут постоянные величины.

Запишем (14.6) в наших кратких обозначениях

$$P_i = \sum_j f_{ij}n_j. \tag{14.7}$$

Умножим эти равенства почленно на dS. Тогда вектор $\mathbf{P}$ согласно (14.5) превратится в $\mathbf{F}$, а вектор $\mathbf{n}$ в силу формулы (14.1) в $\mathbf{s}$, и мы получим:

$$F_i = \sum_j f_{ij}s_j. \tag{14.8}$$

Таким образом, для всевозможных бесконечно малых ориентированных площадок, проведенных через данную точку M, координаты вектора силы $\mathbf{F}$ линейно выражаются через координаты вектора площадки $\mathbf{s}$, а следовательно, сила $\mathbf{F}$ получается из вектора площадки $\mathbf{s}$ действием на него некоторого аффинора $\mathfrak{F}$ с координатами f_{ij}:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}\mathbf{s}. \tag{14.9}$$

В самом деле, из линейного характера формул (14.8) сейчас же следует, что для функциональной зависимости $\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s})$ соблюдается свойство $\mathfrak{F}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = \mathfrak{F}(\mathbf{s}_1) + \mathfrak{F}(\mathbf{s}_2)$, что в сочетании с (14.3) и означает, что эта зависимость является некоторым аффинором (см. § 3).

Этот аффинор $\mathfrak{F}$ называется *аффинором напряжений*, а соответствующий ему тензор f_{ij} — *тензором напряжений*.

В каждой точке M будет свой тензор напряжений, так что в деформированном упругом теле возникает поле тензора напряжений.

Чтобы уяснить себе смысл координат тензора напряжений в данной точке M, достаточно, например, положить $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$.

Тогда

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0,$$

и формулы (14.6) дают

$$P_1 = f_{11}, \quad P_2 = f_{21}, \quad P_3 = f_{31}. \tag{14.10}$$

Мы получаем координаты напряжения $\mathbf{P}$ на площадке, ортогональной к $\mathbf{e}_1$.

Таким образом, f_{ij} выражает i-ю координату напряжения **P** на площадке, ортогональной к j-му орту $\mathbf{e}_j$ (i, $j = 1$, 2, 3).

Из механических соображений можно получить, далее, что тензор напряжений должен быть симметрическим*)

$$f_{ij} = f_{ji}. \tag{14.11}$$

Тензор напряжений возникает не только в деформированном упругом теле, но и, например, в жидкости. Если жидкость *идеальная*, т. е. силы внутреннего трения отсутствуют, то сила напряжения **F**, действующая на площадку, может быть лишь силой нормального давления на эту площадку, т. е. направлена по нормали **n** (в отрицательную сторону). Так как вектор площадки **s** тоже всегда направлен по **n**, то в формуле (14.9) функция **F** оказывается всегда коллинеарной с аргументом **s**, т. е. у аффинора $\mathfrak{F}$ все направления собственные.

Исследуя собственные направления симметрического аффинора (§ 7), мы обнаружили, что этот случай возможен лишь тогда, когда действие аффинора сводится к умножению на некоторое определенное число. Следовательно,

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}\mathbf{s} = -p\mathbf{s}, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{F} = -pE, \tag{14.12}$$

где число $-p$ означает взятое с обратным знаком давление в данной точке жидкости. Тензор напряжений имеет в этом случае вид

$$f_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad f_{ii} = -p. \tag{14.13}$$

Если же жидкость *вязкая*, то тензор напряжений не обязан иметь столь простой вид, так как помимо нормального давления на данную площадку действуют еще силы, порождаемые трением.

§ 15. Зависимость тензора напряжений от тензора деформаций

Основой теории упругости является установление зависимости тензора напряжений от тензора деформаций. В самом деле, каждый элемент деформированного упругого тела испытывает, как мы знаем, параллельный сдвиг, поворот и чистую деформацию. Только последняя вызывает появление упругих сил, а следовательно, тензор напряжений должен в каждой точке тела зависеть от тензора деформаций, который как раз и выражает чистую деформацию. Если такая зависимость будет установлена, то становится ясной и основная схема теории упругости, которая в грубых чертах такова: ускорения, испытываемые частицами упругого тела, зависят от напряжений в нем, эти последние зависят от тензора деформаций, а тензор деформаций выражается уже известным нам образом через переме-

*) См. там же, § 2, формулы (1.6).