Таким образом, f_{ij} выражает i-ю координату напряжения $\mathbf{P}$ на площадке, ортогональной к j-му орту $\mathbf{e}_j$ (i, $j=1$, 2, 3).

Из механических соображений можно получить, далее, что тензор напряжений должен быть симметрическим*)

$$f_{ij}=f_{ji}. \tag{14.11}$$

Тензор напряжений возникает не только в деформированном упругом теле, но и, например, в жидкости. Если жидкость *идеальная*, т. е. силы внутреннего трения отсутствуют, то сила напряжения $\mathbf{F}$, действующая на площадку, может быть лишь силой нормального давления на эту площадку, т. е. направлена по нормали $\mathbf{n}$ (в отрицательную сторону). Так как вектор площадки $\mathbf{s}$ тоже всегда направлен по $\mathbf{n}$, то в формуле (14.9) функция $\mathbf{F}$ оказывается всегда коллинеарной с аргументом $\mathbf{s}$, т. е. у аффинора $\mathfrak{F}$ все направления собственные.

Исследуя собственные направления симметрического аффинора (§ 7), мы обнаружили, что этот случай возможен лишь тогда, когда действие аффинора сводится к умножению на некоторое определенное число. Следовательно,

$$\mathbf{F}=\mathfrak{F}\mathbf{s}=-p\mathbf{s}, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{F}=-pE, \tag{14.12}$$

где число $-p$ означает взятое с обратным знаком давление в данной точке жидкости. Тензор напряжений имеет в этом случае вид

$$f_{ij}=0 \quad (i\neq j), \quad f_{ii}=-p. \tag{14.13}$$

Если же жидкость *вязкая*, то тензор напряжений не обязан иметь столь простой вид, так как помимо нормального давления на данную площадку действуют еще силы, порождаемые трением.

§ 15. Зависимость тензора напряжений от тензора деформаций

Основой теории упругости является установление зависимости тензора напряжений от тензора деформаций. В самом деле, каждый элемент деформированного упругого тела испытывает, как мы знаем, параллельный сдвиг, поворот и чистую деформацию. Только последняя вызывает появление упругих сил, а следовательно, тензор напряжений должен в каждой точке тела зависеть от тензора деформаций, который как раз и выражает чистую деформацию. Если такая зависимость будет установлена, то становится ясной и основная схема теории упругости, которая в грубых чертах такова: ускорения, испытываемые частицами упругого тела, зависят от напряжений в нем, эти последние зависят от тензора деформаций, а тензор деформаций выражается уже известным нам образом через переме-

*) См. там же, § 2, формулы (1.6).

щения частиц тела. Следовательно, ускорения частиц тела выражаются в зависимости от их перемещений, что и приводит к основным дифференциальным уравнениям теории упругости.

Итак, речь идет о зависимости тензора напряжений f_{ij} (§ 14) от тензора деформаций $\tilde{b}_{ij}$ (§ 13).

В первом приближении (как это большей частью и делается в теории упругости) эту зависимость можно считать линейной. Для однородных и изотропных тел она имеет вид

$$f_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\tilde{b}_{ij}. \tag{15.1}$$

Здесь λ и μ — *коэффициенты Ламе*, постоянные для данного тела, а θ — относительное объемное расширение (13.7):

$$\theta=\sum_i \tilde{b}_{ii}. \tag{15.2}$$

Разумеется, θ — инвариант преобразования координатной системы и по своему геометрическому смыслу, и как след аффинора $\tilde{\mathfrak{B}}$. Обратим внимание на инвариантный характер зависимости (15.1): в какой бы координатной системе ни вычислять f_{ij} по этой формуле, они всегда будут служить координатами одного и того же тензора.

В самом деле, f_{ij} получаются сложением координат двух тензоров, из которых один — единичный тензор δ_{ij}, умноженный на инвариант $\lambda\theta$, а другой — тензор деформаций $\tilde{b}_{ij}$, умноженный на инвариант (и даже константу) 2μ. Операция носит, таким образом, тензорный характер. Легко заметить, что три взаимно ортогональных собственных направления являются общими для тензора деформаций и для тензора напряжений (главные оси деформаций и напряжений). В них картина деформаций и напряжений становится особенно простой.

На обосновании формулы (15.1) мы останавливаться не будем, отсылая за этим к курсам теории упругости.

Несколько иной вид принимает зависимость (15.1) в случае жидкости (вообще говоря, вязкой). Аффинор напряжений $\mathfrak{F}$ состоит здесь из двух слагаемых $\mathfrak{F}^{(1)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$, первое из которых представляет собой реакцию жидкости на изменение ее формы. Его мы сейчас и рассмотрим. Жидкость не оказывает сопротивления изменению ее формы, если это изменение уже произошло, однако оказывает сопротивление в самом процессе изменения, что и выражается в силах внутреннего трения.

Поэтому та часть тензора напряжений, которая связана с силами внутреннего трения, будет зависеть не от аффинора деформаций $\tilde{\mathfrak{B}}$, а от аффинора *скоростей* деформации $\mathfrak{B}$ (12.7) с координатами

$$b_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{15.3}$$

Здесь, как и в § 12, a_i — координаты вектора поля скоростей $\mathbf{a}(M)$.

При этом нужно учитывать даже не весь аффинор скоростей деформации $\mathfrak{B}$, а только ту его часть $\mathfrak{B}^{(1)}$, которая отвечает изменению формы элемента жидкости, откинув другую часть $\mathfrak{B}^{(2)}$, отвечающую лишь изменению объема.

Говоря точнее, мы разлагаем аффинор $\mathfrak{B}$ на два слагаемых:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{B}^{(2)} \tag{15.4}$$

таким образом, чтобы $\mathfrak{B}^{(2)}$ имело вид

$$\mathfrak{B}^{(2)} = bE \tag{15.5}$$

и, следовательно, вызывало бы в элементе жидкости происходящее с известной скоростью преобразование подобия.

Действительно, как мы знаем из § 12, за бесконечно малый промежуток времени ε элемент жидкости подвергается деформации при помощи аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{B}$; в том числе за счет $\mathfrak{B}^{(2)}$ получается аффинор

$$E + \varepsilon\mathfrak{B}^{(2)} = (1 + \varepsilon b)\,E, \tag{15.6}$$

который означает преобразование подобия с изменением линейных размеров в отношении $1 + \varepsilon b$. Коэффициент b в формуле (15.5) мы выбираем так, *чтобы это преобразование подобия могло принять на себя все изменение объема элемента жидкости*. Тогда оставшееся слагаемое $\mathfrak{B}^{(1)}$ определяет как бы чистое «изменение формы» элемента жидкости без изменения объема. За возникновение сил внутреннего трения мы будем считать ответственным именно это первое слагаемое $\mathfrak{B}^{(1)}$. Действительно, второе слагаемое $\mathfrak{B}^{(2)}$ означает лишь преобразование подобия, т. е. равномерное объемное расширение (сжатие) элемента жидкости; это изменяет лишь давление p (в более детальной теории соответствующее слагаемое в p рассматривается отдельно).

Подсчитаем теперь коэффициент b. Преобразование подобия (15.6) означает изменение объема в отношении

$$(1 + b\varepsilon)^3 \approx 1 + 3b\varepsilon. \tag{15.7}$$

Мы откинули здесь бесконечно малые высшего порядка относительно ε.

Поскольку преобразование подобия (15.6) мы подбираем так, чтобы оно приняло на себя все изменение объема, нам приходится положить:

$$3b = \operatorname{div}\mathbf{a} = \sum_i b_{ii}, \tag{15.8}$$

Действительно, как видно из (15.7), при нашем преобразовании подобия относительное объемное расширение за время ε равно $3b\varepsilon$.

Оно должно совпадать с имеющим место в действительности относительным объемным расширением (12.8), откуда и получаем (15.8).

Итак, мы от аффинора скоростей деформации $\mathfrak{B}$ отщепляем аффинор

$$\mathfrak{B}^{(2)} = \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E, \tag{15.9}$$

принимающий на себя все изменение объема элемента жидкости, а оставшийся аффинор

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{B} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E, \tag{15.10}$$

означающий лишь изменение формы без изменения объема, считаем целиком ответственным за возникновение сил внутреннего трения.

В гидродинамике принимается, что в изотропной вязкой жидкости первая часть $\mathfrak{F}^{(1)}$ аффинора напряжений $\mathfrak{F}$, вызванная силами внутреннего трения, пропорциональна аффинору $\mathfrak{B}^{(1)}$:

$$\mathfrak{F}^{(1)} = 2\mu\mathfrak{B}^{(1)} = 2\mu\left\{\mathfrak{B} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E\right\}. \tag{15.11}$$

Коэффициент μ — для данной жидкости величина постоянная — называется ее *коэффициентом вязкости*.

Если записать (15.11) в координатной форме, то получим:

$$f_{ij}^{(1)} = 2\mu\left\{b_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot\delta_{ij}\right\}, \tag{15.12}$$

где b_{ij} определяется по формуле (12.7), а δ_{ij} — координаты единичного аффинора E. Как легко проверить, пользуясь (15.8), след аффинора $\mathfrak{F}^{(1)}$ равен нулю.

Вторая часть $\mathfrak{F}^{(2)}$ аффинора напряжений $\mathfrak{F}$, не связанная с силами внутреннего трения, принимается такой же, как и в идеальной жидкости, где эти силы полностью отсутствуют. В силу (14.12) получаем:

$$\mathfrak{F}^{(2)} = -pE, \tag{15.13}$$

где $p = p(M)$ — давление в данной точке жидкости (в данном случае после исключения сил внутреннего трения).

В координатной записи:

$$f_{ij}^{(2)} = -p\delta_{ij}. \tag{15.14}$$

Складывая почленно (15.11) и (15.13), получим окончательное выражение тензора напряжений:

$$\mathfrak{F} = 2\mu\left\{\mathfrak{B} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\mathbf{a}\cdot E\right\} - pE. \tag{15.15}$$

Соответственно в координатах:

$$f_{ij} = 2\mu \left\{ b_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} \right\} - p\delta_{ij} =$$
$$= \mu \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (15.16)$$

Так как след аффинора $\mathfrak{F}^{(1)}$ равен нулю, то след $\mathfrak{F}$ совпадает со следом $\mathfrak{F}^{(2)}$, т. е. имеет значение $3p$. Отсюда давление p в каждой точке можно вычислить по формуле

$$p = -\frac{1}{3} \sum_i f_{ii}. \quad (15.17)$$

В случае несжимаемой жидкости, плотность которой $\rho(M) = \text{const}$, давление $p(M)$ связывается с вектором скорости дифференциальными уравнениями движения жидкости,— ими мы еще будем заниматься. В случае сжимаемой жидкости $p(M)$ связано, кроме того, с плотностью $\rho(M) \neq \text{const}$ определенными соотношениями, которыми мы заниматься не будем.

§ 16. Поток векторного поля через поверхность

Возвратимся к общей теории векторного поля $\mathbf{a}(M)$. Пусть нам дана некоторая ограниченная кусочно гладкая поверхность S. Это значит, что она склеена из конечного числа ограниченных кусков, на каждом из которых (включая границу куска) она обладает непрерывно меняющейся касательной плоскостью. Говоря более точно, мы требуем, чтобы поверхность могла быть склеена из конечного числа кусков, каждый из которых при подходящем выборе координатных осей можно задать уравнением

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad (16.1)$$

где $f(x_1, x_2)$ — функция с непрерывными частными производными 1-го порядка, определенная в некоторой области D на плоскости x_1, x_2; при этом D ограничена кусочно гладким (не самопересекающимся) контуром. Функция f определена на D, включая и ее границу. Далее предполагается, что склеивание производится так, что кусочек поверхности в окрестности каждой точки склеивания допускает взаимно однозначное и непрерывное отображение на кружок.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие поверхности. Кроме того, мы будем считать, что поверхность двусторонняя и, следовательно, ее нормаль (определенная во всяком случае на каждом отдельном ее куске) может быть снабжена положительным направлением так, что единичный вектор $\mathbf{n}$, идущий в этом направ-