Соответственно в координатах:

$$f_{ij} = 2\mu \left\{ b_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} \right\} - p\delta_{ij} =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (15.16)$$

Так как след аффинора $\mathfrak{F}^{(1)}$ равен нулю, то след $\mathfrak{F}$ совпадает со следом $\mathfrak{F}^{(2)}$, т. е. имеет значение $3p$. Отсюда давление p в каждой точке можно вычислить по формуле

$$p = -\frac{1}{3} \sum_i f_{ii}. \quad (15.17)$$

В случае несжимаемой жидкости, плотность которой $\rho(M) = \mathrm{const}$, давление $p(M)$ связывается с вектором скорости дифференциальными уравнениями движения жидкости,— ими мы еще будем заниматься. В случае сжимаемой жидкости $p(M)$ связано, кроме того, с плотностью $\rho(M) \neq \mathrm{const}$ определенными соотношениями, которыми мы заниматься не будем.

§ 16. Поток векторного поля через поверхность

Возвратимся к общей теории векторного поля $\mathbf{a}(M)$. Пусть нам дана некоторая ограниченная кусочно гладкая поверхность S. Это значит, что она склеена из конечного числа ограниченных кусков, на каждом из которых (включая границу куска) она обладает непрерывно меняющейся касательной плоскостью. Говоря более точно, мы требуем, чтобы поверхность могла быть склеена из конечного числа кусков, каждый из которых при подходящем выборе координатных осей можно задать уравнением

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad (16.1)$$

где $f(x_1, x_2)$ — функция с непрерывными частными производными 1-го порядка, определенная в некоторой области D на плоскости x_1, x_2; при этом D ограничена кусочно гладким (не самопересекающимся) контуром. Функция f определена на D, включая и ее границу. Далее предполагается, что склеивание производится так, что кусочек поверхности в окрестности каждой точки склеивания допускает взаимно однозначное и непрерывное отображение на кружок.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие поверхности. Кроме того, мы будем считать, что поверхность двусторонняя и, следовательно, ее нормаль (определенная во всяком случае на каждом отдельном ее куске) может быть снабжена положительным направлением так, что единичный вектор $\mathbf{n}$, идущий в этом направлении, указывает в местах склейки «в одну и ту же сторону» от поверхности, независимо от того, какому из склеиваемых кусков он принадлежит. Конечно, предполагается, что в пределах каждого отдельного куска вектор $\mathbf{n}$ меняется от точки к точке непрерывно.

Если поверхность ограничивает некоторое пространственное тело, то вектор $\mathbf{n}$ мы будем направлять по внешней нормали, если же нет, то предполагаем, что выбор $\mathbf{n}$ произведен каким-нибудь одним из двух возможных способов.

Поверхность S мы будем называть в этом случае *ориентированной* и только такие поверхности будем рассматривать.

Если поверхность S помещена в той области Ω, в которой задано векторное поле $\mathbf{a}(M)$, то для этой поверхности можно определить важное понятие потока векторного поля.

Потоком векторного поля $\mathbf{a}(M)$ *через данную поверхность* S *называется взятый по этой поверхности двойной интеграл от элемента площади* dS, *умноженного на нормальную составляющую вектора поля* $\mathbf{a}(M)$:

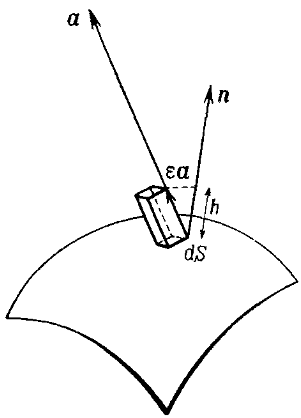

Рис. 4.

$$p = \iint_S \mathbf{an}\, dS. \qquad (16.2)$$

Так как $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, то скалярное произведение $\mathbf{an}$ выражает как раз проекцию вектора поля $\mathbf{a}$ на положительное направление нормали к поверхности. Двойной интеграл по поверхности следует понимать как сумму соответствующих интегралов по гладким кускам, составляющим поверхность.

Значение введенного нами понятия выясняется из следующих примеров.

1°. Пусть $\mathbf{a}(M)$ — поле скоростей стационарного движения жидкости (§ 12). Тогда поток p выражает объем жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность с отрицательной ее стороны на положительную (если жидкость сжимаемая, то объем каждой «капли» жидкости мы оцениваем в момент ее протекания через поверхность S). Разумеется, если течение жидкости происходит в обратном направлении, то поток засчитывается с отрицательным знаком.

В самом деле, за бесконечно малый промежуток времени ε частицы жидкости, находящиеся на элементе поверхности dS, сместятся на вектор $\varepsilon\mathbf{a}$ (рис. 4). В результате этого через площадку dS вытеснится некоторый объем жидкости, заключенный в наклонном цилиндре с основанием dS и с образующей, которая совпадает с вектором $\varepsilon\mathbf{a}$. Этот объем dV мы найдем, умножая площадь основания цилиндра dS на его высоту h, которая равна проекции образующей $\varepsilon\mathbf{a}$ на перпендикуляр к основанию dS, т. е. на нормаль к поверхности:

$$h = \varepsilon\mathbf{an}, \quad dV = h\,dS = \varepsilon\mathbf{an}\,dS.$$

Интегрируя полученный элементарный объем по всей поверхности S, мы видим, что полный объем жидкости, протекающий через S за время ε, равен

$$\varepsilon \iint_S \mathbf{an}\,dS,$$

а за единицу времени он, следовательно, равен потоку p, как видно из (16.2).

Рассуждение, которое мы сейчас провели, нельзя, разумеется, считать доказательством, так как оно было проведено чрезвычайно грубо; мы путали маленький кусочек кривой поверхности dS с кусочком плоскости, переменный вектор $\mathbf{a}(M)$ считали в пределах dS постоянным, а в заключение суммирование по кусочкам поверхности подменили двойным интегрированием. Однако это грубое рассуждение содержит правильную идею, и, уточняя его, можно было бы показать, что все допущенные нами ошибки исчезают при предельном переходе к интегралу, так что окончательный результат является правильным. Чтобы не загромождать изложения, мы ограничимся здесь, как и в других примерах этого параграфа, лишь такого рода ориентировочными рассуждениями.

2°. По-прежнему $\mathbf{a}(M)$ — поле скоростей стационарного движения жидкости, а $\rho(M)$ — ее плотность. Тогда поток вектора $\rho(M)\mathbf{a}(M)$ через поверхность S

$$\iint_S \rho\mathbf{an}\,dS \tag{16.3}$$

дает массу жидкости, протекающую через S за единицу времени.

В самом деле, подсчитывая массу жидкости, протекшую за время ε через элемент поверхности dS, мы должны умножить на плотность ρ соответствующий объем dV:

$$\rho\,dV = \varepsilon\rho\mathbf{an}\,dS.$$

Интегрируя затем по всей поверхности S и относя результат к единице времени (т. е. деля на ε), получаем (16.3).

Возвращаясь к общему определению потока (16.2), отметим, что его (в целях последующих выкладок) можно переписать так:

$$p = \iint_S \sum_i a_i n_i\,dS. \tag{16.4}$$

Здесь скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ записано как результат свертывания соответствующих тензоров.