§ 17. Поток аффинорного поля через поверхность

Пусть теперь в области Ω, где выбрана поверхность S, вместо векторного поля $\mathbf{a}(M)$ задано аффинорное поле $\mathfrak{A}(M)$, т. е. вместо поля одновалентного тензора a_i — поле двухвалентного тензора a_{ij}.

Мы определяем поток аффинорного поля $\mathfrak{A}(M)$ через поверхность S как взятый по этой поверхности двойной интеграл от элемента площади dS, умноженного на результат действия аффинора $\mathfrak{A}$ на вектор единичной нормали $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{p} = \iint_S \mathfrak{A}\mathbf{n}\, dS. \tag{17.1}$$

Поток $\mathbf{p}$ аффинора $\mathfrak{A}(M)$ как результат интегрирования вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$ также будет *вектором* в отличие от потока p вектора $\mathbf{a}(M)$, который представлял собой *число*.

Что же касается интегрирования вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$, то, не вдаваясь в излишние разъяснения, его можно определить просто как интегрирование каждой из координат этого вектора по отдельности. Тогда формула (17.1) распадется на три координатные формулы:

$$p_i = \iint_S \sum_j a_{ij} n_j dS \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{17.2}$$

и

Мы выразили здесь координаты вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$ согласно (3.13) при помощи тензорной операции свертывания.

В этой записи обнаруживается глубокое формальное родство понятий потока векторного поля и потока аффинорного поля. В самом деле, формула (17.2) представляет собой как бы повторенную в трех вариантах (при $i = 1, 2, 3$) формулу (16.4). Этим родством мы в дальнейшем воспользуемся.

Не нужно забывать, что величины a_{ij}, n_j, стоящие под знаком интеграла (17.2), меняются от точки к точке поверхности, хотя мы и не выписываем явно их аргументов. Аналогично дело обстоит и в случае (16.4).

Теперь укажем важнейшее приложение понятия потока аффинора.

Пусть в какой-либо сплошной среде имеются силы напряжения, характеризуемые полем аффинора напряжений $\mathfrak{F}$ с координатами f_{ij}. Составим поток этого аффинора через какую-либо поверхность S, мысленно построенную нами в рассматриваемой среде. Тогда в силу (17.1)

$$\mathbf{p} = \iint_S \mathfrak{F}\mathbf{n}\, dS. \tag{17.3}$$

Но подынтегральное выражение согласно (14.4) представляет собой силу напряжения, приложенную к элементарной площадке dS (которая предполагается ориентированной соответственно ориентации всей поверхности S). Поэтому в результате интегрирования мы получаем *равнодействующую* **p** *всех сил напряжения, приложенных к поверхности* S. Таков смысл потока аффинора напряжений.

§ 18. Теорема Остроградского

Теорема Остроградского сводит вычисление потока векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую некоторое пространственное тело ω, к тройному интегралу по этому телу от дивергенции вектора $\mathbf{a}$:

$$\iint_S \mathbf{an}\,dS = \iiint_\omega \operatorname{div}\mathbf{a}\,d\omega. \tag{18.1}$$

Здесь $d\omega$ обозначает элемент объема, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Для доказательства удобно переписать (18.1) в координатной форме:

$$\iint_S (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3)\,dS = \iiint_\omega \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) d\omega. \tag{18.2}$$

Мы докажем сначала формулу (18.2) в частном случае, когда $a_1 = a_2 = 0$. Тогда она принимает вид

$$\iint_S a_3 n_3\,dS = \iiint_\omega \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\,d\omega. \tag{18.3}$$

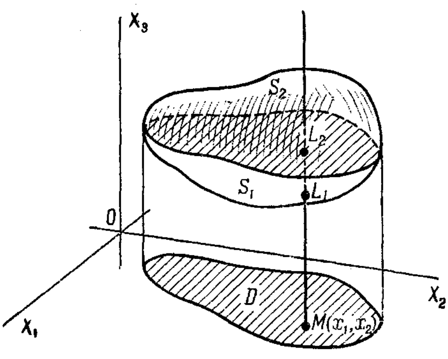

Рис. 5.

На время можно забыть, что a_3 — координата вектора $\mathbf{a}$, а просто рассматривать ее как некоторую (непрерывно дифференцируемую) функцию от координат x_1, x_2, x_3.

Предположим сначала, что поверхность S такова, что каждая параллель оси X_3 пробивает ее не более чем в двух точках. Для краткости будем называть поверхность S в этом случае *правильно расположенной*. Проектируя S на плоскость X_1X_2, получим на последней некоторую область D (рис. 5). Проводя параллели оси X_3 через