Но подынтегральное выражение согласно (14.4) представляет собой силу напряжения, приложенную к элементарной площадке dS (которая предполагается ориентированной соответственно ориентации всей поверхности S). Поэтому в результате интегрирования мы получаем *равнодействующую* **p** *всех сил напряжения, приложенных к поверхности* S. Таков смысл потока аффинора напряжений.

§ 18. Теорема Остроградского

Теорема Остроградского сводит вычисление потока векторного поля $\mathbf{a}(M)$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую некоторое пространственное тело ω, к тройному интегралу по этому телу от дивергенции вектора $\mathbf{a}$:

$$\iint_S \mathbf{an}\, dS = \iiint_\omega \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\omega. \tag{18.1}$$

Здесь $d\omega$ обозначает элемент объема, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Для доказательства удобно переписать (18.1) в координатной форме:

$$\iint_S (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3)\, dS = \iiint_\omega \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\right) d\omega. \tag{18.2}$$

Мы докажем сначала формулу (18.2) в частном случае, когда $a_1 = a_2 = 0$. Тогда она принимает вид

$$\iint_S a_3 n_3\, dS = \iiint_\omega \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega. \tag{18.3}$$

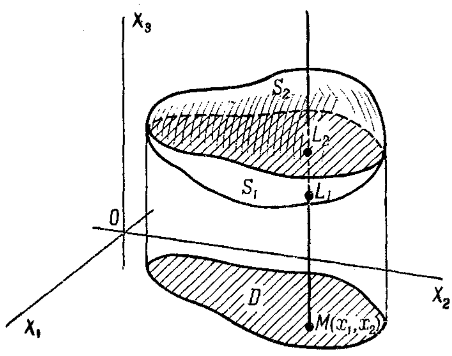

Рис. 5.

На время можно забыть, что a_3 — координата вектора $\mathbf{a}$, а просто рассматривать ее как некоторую (непрерывно дифференцируемую) функцию от координат x_1, x_2, x_3.

Предположим сначала, что поверхность S такова, что каждая параллель оси X_3 пробивает ее не более чем в двух точках. Для краткости будем называть поверхность S в этом случае *правильно расположенной*. Проектируя S на плоскость X_1X_2, получим на последней некоторую область D (рис. 5). Проводя параллели оси X_3 через точки $M(x_1, x_2)$ области D, мы отмечаем на каждой из них точки L_1, L_2 пересечения с поверхностью S.

Пусть L_1 расположена «ниже» L_2*), т. е. обладает меньшей координатой x_3. Когда точка M описывает область D, L_1 описывает нижнюю часть поверхности S, которую обозначим S_1, а L_2 — верхнюю часть, которую обозначим S_2. При этом и для L_1, и для L_2 координата x_3 меняется в зависимости от x_1, x_2:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= f_1(x_1, x_2) \quad (\text{для } L_1); \\ x_3 &= f_2(x_1, x_2) \quad (\text{для } L_2). \end{aligned}\right\} \tag{18.4}$$

Уравнения, которые мы записали, определяют, таким образом, соответственно поверхности S_1 и S_2.

Функции f_1, f_2 однозначны по определению и непрерывны, как можно вывести из наших общих предположений о характере поверхности S (§ 16).

Вычисляем теперь правую часть (18.3), производя сначала интегрирование по x_3 при данных x_1, x_2 от f_1 до f_2, а затем интегрирование по x_1, x_2 в пределах области D:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega = \iint\limits_{D} \int\limits_{f_1(x_1, x_2)}^{f_2(x_1, x_2)} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, dx_3\, dx_2\, dx_1 =$$
$$= \iint\limits_{D} \{a_3(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)) - a_3(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2))\}\, dx_1\, dx_2. \tag{18.5}$$

С другой стороны, рассмотрим левую часть (18.3), разбивая ее на два интеграла — по S_1 и по S_2:

$$\iint\limits_{S} a_3 n_3\, dS = \iint\limits_{S_1} a_3 n_3\, dS + \iint\limits_{S_2} a_3 n_3\, dS. \tag{18.6}$$

Если функция $x_3 = f_1(x_1, x_2)$ обладает непрерывными частными производными 1-го порядка, то для соответствующей поверхности S_1 элемент площади dS и единичный нормальный вектор $\mathbf{n}$ можно записать, как известно, в виде

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1\, dx_2, \tag{18.7}$$

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\pm\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}}. \tag{18.8}$$

*) Или в крайнем случае с ней совпадает (когда M лежит на границе области D).

Знак $\pm$ соответствует тому или другому выбору положительного направления на нормали.

Отсюда, в частности,

$$n_3 = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}}. \qquad (18.9)$$

Так как S_1 образует нижнюю границу рассматриваемого объема, то внешняя нормаль будет направлена «вниз» (т. е. в сторону убывания x_3), и проекция n_3 вектора $\mathbf{n}$ на ось X_3 будет отрицательной; в формуле (18.9) мы выбираем знак минус. Перемножая (18.7) и (18.9), получим:

$$n_3\,dS = -dx_1\,dx_2, \qquad (18.10)$$

и следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} a_3 n_3 dS = -\iint\limits_{S_1} a_3\,dx_1\,dx_2 = \\ = -\iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_1(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2. \qquad (18.11)$$

В последней записи мы свели интеграл по поверхности S_1 к двойному интегралу по переменным x_1, x_2, которые пробегают область D, когда точка пробегает поверхность S_1. При этом пришлось уже явно указать, что a_3 берется для точек поверхности S_1, т. е. аргументу x_3 придается значение $f_1(x_1,\ x_2)$.

Совершенно аналогично мы поступаем с интегралом по S_2 с той только разницей, что S_2 ограничивает рассматриваемый объем сверху, вектор $\mathbf{n}$ будет направлен «вверх» (в сторону возрастания x_3), и в формуле (18.9) мы должны будем взять знак плюс. Соответственно и в формуле (18.10) знак $-$ заменяется на $+$, и мы получаем:

$$\iint\limits_{S_2} a_3 n_3\,dS = \iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_2(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2. \qquad (18.12)$$

Две последние формулы позволяют переписать (18.6) в виде

$$\iint\limits_{S} a_3 n_3\,dS = -\iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_1(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2 + \\ + \iint\limits_{D} a_3(x_1,\ x_2,\ f_2(x_1,\ x_2))\,dx_1\,dx_2.$$

Сравнивая это выражение с (18.5), убеждаемся в справедливости формулы (18.3), которую нам и требовалось доказать.

При доказательстве мы предположили, что $f_1(x_1, x_2)$ (и аналогично $f_2(x_1, x_2)$) имеют непрерывные частные производные. В действительности это не везде соблюдается, так как поверхность S, вообще говоря, лишь кусочно гладкая и, кроме того, на ней могут встречаться точки, особенно по линии соединения S_1 и S_2, в которых касательная плоскость параллельна оси X_3.

В таком случае доказательство равенства (18.12) (и аналогично (18.11)) следует видоизменить: сначала это равенство устанавливается для отдельных гладких кусков $S_2^{(i)}$ поверхности S_2 и соответствующих кусков $D^{(i)}$ области D, откуда почленным сложением приходим к равенству (18.12). При доказательстве равенства для отдельного гладкого куска $S_2^{(i)}$ мы относим его к параметрам u_1, u_2, причем текущие координаты x_1, x_2, x_3 являются функциями u_1, u_2 с непрерывными частными производными 1-го порядка.

Из дифференциальной геометрии известно, что тогда

$$\left.\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG-F^2}\,du_1\,du_2, \\ n_3 &= \pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}, \end{aligned}\right\} \tag{18.13}$$

где

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}^{*)}.$$

В случае S_2 мы берем n_3 положительным, вернее неотрицательным, так как $n_3 = 0$ в точках, где касательная плоскость параллельна оси X_3. Следовательно,

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right|, \tag{18.14}$$

а значит,

$$n_3\,dS = \left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right| du_1 du_2. \tag{18.15}$$

Отсюда

$$\iint\limits_{S_2^{(i)}} a_3 n_3\,dS = \iint\limits_{S_2^{(i)}} a_3\left|\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right| du_1\,du_2 = \iint\limits_{D^{(i)}} a_3\,dx_1\,dx_2.$$

Последний знак равенства поставлен на основании формулы преобразования переменных под знаком двойного интеграла. Этим

---

*) См., например, П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, изд. 3-е, Гостехиздат, М.—Л., 1950, формулы (338), (350) и (360).

равенство (18.12) доказано для отдельных кусков $S_2^{(i)}$, а значит, и для S_2.

Аналогично поступаем с S_1 и его гладкими кусками $S_1^{(i)}$ с той лишь разницей, что в формуле (18.14), а значит, и в формуле (18.15), в правой части добавляется знак минус, и мы приходим к (18.11).

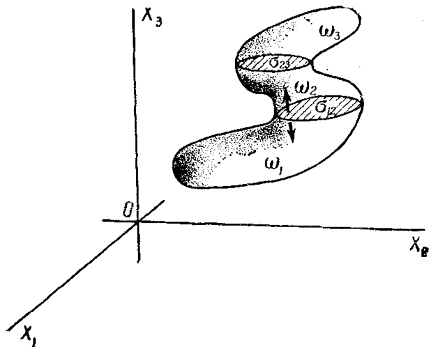

Рис. 6.

Итак, формула (18.3) у нас доказана, правда, пока только для «правильно расположенных» поверхностей S. Но она будет верна и для произвольной замкнутой поверхности S, ограничивающей некоторое пространственное тело ω. В самом деле, это тело всегда можно разбить на куски ω_i таким образом, чтобы ограничивающие их поверхности S_i были «правильно расположенными» (не вдаваясь в подробности, будем считать это наглядно очевидным; см. рис. 6). В таком случае мы выписываем формулу (18.3) по отдельности для каждого куска

$$\iint\limits_{S_i} a_3 n_3 \, dS = \iiint\limits_{\omega_i} \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \, d\omega \qquad (18.16)$$

и все эти формулы складываем почленно. В правой части сумма интегралов по телам ω_i даст соответствующий интеграл по ω, а в левой части сумма интегралов по поверхностям S_i даст интеграл по поверхности S. В самом деле, интегралы по дополнительным поверхностям, рассекающим тело ω, берутся по два раза с противоположными знаками и в сумме уничтожаются. Так, например, интеграл по поверхности σ_{12} войдет, во-первых, в состав интеграла по поверхности S_1, ограничивающей тело ω_1, и, во-вторых, в состав интеграла по поверхности S_2, ограничивающей тело ω_2. Так как тела ω_1 и ω_2 примыкают к σ_{12} с противоположных сторон, то внешние нормали к σ_{12} будут направлены в том и другом случае в противоположные стороны, так что вектор **n** меняет направление на обратное, а его проекция n_3 меняет знак. Но вместе с n_3 меняет знак и интеграл $\iint\limits_{\sigma_{12}} a_3 n_3 \, dS$.

Итак, формула (18.3) доказана окончательно. Но ввиду полного равноправия координатных осей она будет верна и с заменой 3-го индекса на 1-й или 2-й. Складывая все три формулы почленно, получаем равенство (18.2), а следовательно, и (18.1). Доказательство закончено.

Рассмотрим еще поток аффинорного поля $\mathfrak{A}$ через замкнутую поверхность S. Пользуясь координатной записью (17.2), получим:

$$p_i = \iint\limits_S (a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + a_{i3}n_3)\, dS =$$
$$= \iiint\limits_\omega \left(\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3}\right) d\omega. \qquad (18.17)$$

Последнее выражение получено на основании формулы (18.2). Введем понятие *дивергенции аффинорного поля*, а именно, сопоставим аффинорному полю $\mathfrak{A}$ векторное поле $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$, определив координаты вектора $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$ формулами:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\}_i = \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j} = \sum_j \nabla_j a_{ij}. \qquad (18.18)$$

Мы видим, что координаты вектора $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$ образуют одновалентный тензор, полученный свертыванием тензора $\nabla_k a_{ij}$ по 1-му и 3-му индексам; следовательно, вектор $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}$ будет в каждой точке вполне определенным (не зависит от выбора координатной системы, в которой вычисляются его координаты; см. § 1).

Теперь (18.17) можно переписать в виде

$$p_i = \iiint\limits_\omega \{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\}_i\, d\omega,$$

или, что то же,

$$\mathbf{p} = \iiint\limits_\omega \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\, d\omega. \qquad (18.19)$$

Записав $\mathbf{p}$ в развернутом виде согласно (17.1), получим окончательно

$$\iint\limits_S \mathfrak{A}\mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_\omega \overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{A}\, d\omega. \qquad (18.20)$$

Мы получили теорему Остроградского для потока аффинора через замкнутую поверхность.