§ 19. Основные уравнения гидродинамики

Теперь мы можем составить основные дифференциальные уравнения гидродинамики. Они, в сущности, сводятся к записи второго закона Ньютона для элемента жидкости.

Предположим для общности, что внутри жидкости действуют (кроме сил напряжения) объемные силы, т. е. нам задано векторное поле $\mathbf{Q}(M, t)$, выражающее в каждой точке и в каждый момент времени силу, действующую на элемент жидкости и отнесенную к единице ее массы.

Мы рассматривали до сих пор в случае течения жидкости лишь стационарные процессы, когда все изучаемые нами величины, например, вектор поля скоростей $\mathbf{a}$, плотность ρ, аффинор напряжений $\mathfrak{F}$ и т. д. зависели лишь от точки M, в которой мы их рассматривали; теперь будем считать их, кроме того, и функциями времени:

$$\mathbf{a}(M, t), \quad \rho(M, t), \quad \mathfrak{F}(M, t) \text{ и т. д.}$$

Полученные ранее выводы этим затронуты не будут, так как стационарность процесса мы предполагали лишь для простоты и по существу не использовали.

Сначала составим равнодействующую сил напряжения, действующих на замкнутую поверхность S, которая выделяет каким-либо образом часть нашей жидкой среды. Относительно поверхности S сохраняем прежние предположения; $\mathbf{n}$ направляем по внешней нормали.

Эта равнодействующая согласно (17.3) имеет вид

$$\mathbf{p} = \iint\limits_{S} \mathfrak{F}\mathbf{n}\, dS.$$

Пользуясь теоремой Остроградского (18.20), этот результат можно переписать так:

$$\mathbf{p} = \iiint \operatorname{div}\mathfrak{F}\, d\omega, \tag{19.1}$$

где тройной интеграл берется по области, ограниченной поверхностью S.

Далее, составим равнодействующую объемных сил

$$\iiint \mathbf{Q}\rho\, d\omega. \tag{19.2}$$

Этот интеграл также берется по области, ограниченной поверхностью S, причем $d\omega$ — элемент объема, $\rho\, d\omega$ — элемент массы, а $\mathbf{Q}\rho\, d\omega$ — объемная сила, действующая на этот элемент массы.

Составим, наконец, равнодействующую сил инерции для жидкости, заключенной внутри S. Скорость каждой частицы жидкости выражается вектором $\mathbf{a}(M, t)$, ускорение же ее будет выражаться вектором

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a},$$

где $\mathfrak{A}(M, t)$ — производный аффинор векторного поля $\mathbf{a}(M, t)$ (который составляется в каждый данный момент времени так же, как и в § 11).

Действительно, прослеживая движение одной частицы жидкости, мы видим, что ее координаты x_i являются функциями от t, причем в каждой точке M и в каждый момент времени t скорость ее движения выражается вектором $\mathbf{a}(M, t)$. Это можно записать так:

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \mathbf{a}(M, t),$$

или в проекциях на оси:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, x_3, t). \tag{19.3}$$

Чтобы найти проекции ускорения, дифференцируем по t еще раз. Получаем:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + \frac{\partial a_i}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial a_i}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial a_i}{\partial x_3}\cdot\frac{dx_3}{dt}.$$

Пользуясь формулами (11.6) и (19.3), получаем окончательно:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + a_{i3}a_3 = \frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_j a_{ij}a_j, \tag{19.4}$$

где a_{ij} — координаты производного аффинора $\mathfrak{A}$. Обозначая вектор ускорения $\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$, можно перейти теперь от координатной записи к векторной:

$$\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a}. \tag{19.5}$$

Умножая ускорение на элемент массы $\rho\, d\omega$, интегрируя по области, ограниченной S, и беря результат с обратным знаком, мы получаем равнодействующую сил инерции

$$-\iiint\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a}\right)\rho\, d\omega. \tag{19.6}$$

Сумма всех сил, действующих на рассматриваемую часть жидкости, включая силы инерции, должна равняться нулю. Складывая выражения (19.1), (19.2), (19.6) и приравнивая результат нулю, получаем:

$$\iiint\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathfrak{F}+\mathbf{Q}-\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}-\mathfrak{A}\mathbf{a}\right)\rho\,d\omega=0. \tag{19.7}$$

Так как этот тройной интеграл равен нулю для любой области, вырезанной в нашей жидкой среде, то подынтегральное выражение должно равняться нулю тождественно. Мы получаем:

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\mathfrak{A}\mathbf{a}=\mathbf{Q}+\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathfrak{F}. \tag{19.8}$$

При этом, пользуясь формулами (18.18) и (15.16), мы можем вычислить координаты вектора $\operatorname{div}\mathfrak{F}$:

$$[\operatorname{div}\mathfrak{F}]_i=\sum_j\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}=$$

$$=\mu\sum_j\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2}+\mu\sum_j\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{2\mu}{3}\sum_j\frac{\partial\operatorname{div}\mathbf{a}}{\partial x_j}\delta_{ij}-\sum_j\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij}.$$

Так как $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}=\Delta$ есть *оператор Лапласа*, то первый член дает $\mu\Delta a_i$; во втором члене операцию $\frac{\partial}{\partial x_i}$ можно вынести за знак суммы, а сумма дает тогда $\operatorname{div}\mathbf{a}$; в последних двух слагаемых от суммы фактически остается по одному члену, именно, тому, где $j=i$ (остальные обращаются в нуль). Окончательно получим:

$$[\operatorname{div}\mathfrak{F}]_i=\mu\Delta a_i+\mu\frac{\partial\operatorname{div}\mathbf{a}}{\partial x_i}-\frac{2\mu}{3}\frac{\partial\operatorname{div}\mathbf{a}}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=$$

$$=\mu\Delta a_i+\frac{\mu}{3}\frac{\partial\operatorname{div}\mathbf{a}}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{19.9}$$

В векторной форме это же равенство принимает вид

$$\operatorname{div}\mathfrak{F}=\mu\Delta\mathbf{a}+\frac{\mu}{3}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\mathbf{a}-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,p. \tag{19.10}$$

Вставляя полученное выражение в (19.8), имеем окончательно:

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\mathfrak{A}\mathbf{a}=\mathbf{Q}+\frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{a}+\frac{\mu}{3\rho}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\mathbf{a}-\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,p. \tag{19.11}$$

Это *уравнение Навье-Стокса* в инвариантной форме. Здесь фигурируют неизвестные функции $\mathbf{a}(M, t)$, $\rho(M, t)$ и $p(M, t)$. Производный аффинор $\mathfrak{A}$ самостоятельного значения не имеет — его координаты выражаются через координаты $\mathbf{a}$ (M,t) по формулам (11.6):

$$a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Следует отметить еще, что оператор Лапласа Δ (в применении к скалярному или векторному полю безразлично) носит инвариантный характер. Действительно,

$$\Delta a = \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}$, полученного двойным дифференцированием скалярного поля $a(x_1, x_2, x_3)$, и, следовательно, представляет собой инвариант.

Аналогично

$$\Delta a_k = \sum_i \frac{\partial^2 a_k (x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\nabla_i \nabla_j a_k = \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$ по индексам i и j и представляет собой, следовательно, снова тензор. Тем самым вектор $\Delta \mathbf{a}$, обладающий, очевидно, координатами Δa_k, будет *инвариантно определенным вектором.*

К уравнению (19.11) нужно присоединить так называемое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{a}) = 0, \tag{19.12}$$

выражающее закон сохранения массы.

§ 20. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях

Мы будем рассматривать малые колебания однородного изотропного упругого тела под действием объемных сил, которые (аналогично § 19) заданы переменным векторным полем $\mathbf{Q}(M, t)$. Вектор $\mathbf{Q}$ выражает объемную силу, отнесенную к единице массы, в данной точке M и в данный момент времени t. Искомым является переменное векторное поле $\mathbf{w}(M, t)$, выражающее перемещение каждой точки упругого тела (сравнительно с положением равновесия) в каждый момент времени. Мы не будем ставить задачу в полном виде и ограничимся инвариантной записью дифференциальных уравнений, накладываемых на $\mathbf{w}(M, t)$.

Тензор деформаций выражается формулой (13.5):

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \tag{20.1}$$