формулам (11.6):

$$a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Следует отметить еще, что оператор Лапласа Δ (в применении к скалярному или векторному полю безразлично) носит инвариантный характер. Действительно,

$$\Delta a = \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \, \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \, \partial x_j}$, полученного двойным дифференцированием скалярного поля $a(x_1, x_2, x_3)$, и, следовательно, представляет собой инвариант.

Аналогично

$$\Delta a_k = \sum_i \frac{\partial^2 a_k (x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \, \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\nabla_i \nabla_j a_k = \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \, \partial x_j}$ по индексам i и j и представляет собой, следовательно, снова тензор. Тем самым вектор $\Delta\mathbf{a}$, обладающий, очевидно, координатами Δa_k, будет *инвариантно определенным вектором.*

К уравнению (19.11) нужно присоединить так называемое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{a}) = 0, \tag{19.12}$$

выражающее закон сохранения массы.

§ 20. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях

Мы будем рассматривать малые колебания однородного изотропного упругого тела под действием объемных сил, которые (аналогично § 19) заданы переменным векторным полем $\mathbf{Q}(M, t)$. Вектор $\mathbf{Q}$ выражает объемную силу, отнесенную к единице массы, в данной точке M и в данный момент времени t. Искомым является переменное векторное поле $\mathbf{w}(M, t)$, выражающее перемещение каждой точки упругого тела (сравнительно с положением равновесия) в каждый момент времени. Мы не будем ставить задачу в полном виде и ограничимся инвариантной записью дифференциальных уравнений, накладываемых на $\mathbf{w}(M, t)$.

Тензор деформаций выражается формулой (13.5):

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \tag{20.1}$$

а тензор напряжений — согласно (15.1):

$$f_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\tilde{b}_{ij}, \qquad \theta = \sum_i \tilde{b}_{ii}. \tag{20.2}$$

Выделим из упругого тела произвольный кусок ω, ограниченный некоторой поверхностью S. Подсчитаем равнодействующую $\mathbf{p}$ сил напряжения, действующих на ω через его поверхность S.

Совершенно аналогично (19.1) получаем:

$$\mathbf{p} = \iiint\limits_{\omega} \overrightarrow{\operatorname{div}}\, \mathfrak{F} \cdot d\omega, \tag{20.3}$$

где $\mathfrak{F}$ — аффинор напряжений, координаты которого имеют вид (20.2). Далее, равнодействующая объемных сил тоже совершенно аналологично (19.2) имеет вид

$$\iiint\limits_{\omega} \mathbf{Q}\rho\, d\omega, \tag{20.4}$$

где ρ — плотность упругого тела.

Заметим, что ввиду малости перемещений $\mathbf{w}$ мы позволяем себе брать все интегралы по той области ω, которую занимает выделенный кусок упругого тела в состоянии равновесия (а не по той переменной области, которую он занимает в процессе колебаний).

По той же причине считаем, что плотность ρ не меняется в процессе колебаний.

Теперь составим равнодействующую сил инерции:

$$-\iiint\limits_{\omega} \rho\, \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}\, d\omega. \tag{20.5}$$

Действительно, $\dfrac{\partial^2 \mathbf{w}(M, t)}{\partial t^2}$ выражает в момент времени t ускорение точки, которая в положении равновесия совпадала с M, а $\rho\, d\omega$ дает элемент массы. Равнодействующая всех сил, действующих на ω, должна равняться нулю. Складывая выражения (20.3), (20.4) и (20.5) и приравнивая нулю, получаем:

$$\iiint\limits_{\omega} \left(\overrightarrow{\operatorname{div}}\, \mathfrak{F} + \mathbf{Q}\rho - \rho\, \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) d\omega = 0.$$

Поскольку равен нулю интеграл, взятый в любой момент времени по *любому куску* ω нашего упругого тела, то это значит, что подынтегральная функция в любой момент времени и в любой точке равна нулю. Поделив на ρ, получаем:

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathfrak{F} + \mathbf{Q} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.6}$$

Пользуясь формулами (18.18) и (20.2), вычисляем координаты $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}$:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i = \sum_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} = \sum_j \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j}\delta_{ij} + \sum_j 2\mu \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}.$$

Так как δ_{ij} равно 1, если $i=j$, и 0, если $i \neq j$, то в первой из двух сумм остается лишь один член $\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$; во второй сумме производим замену, используя формулу (20.1). Получим:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{20.7}$$

Согласно (20.2), (20.1)

$$\theta = \sum_i \tilde{b}_{ii} = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{w} \tag{20.8}$$

Поэтому последний член в (20.7) равен $\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$, так что окончательно можно написать:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta w_i. \tag{20.9}$$

Отсюда, возвращаясь к векторной записи, получаем:

$$\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F} = (\lambda + \mu)\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \theta + \mu\, \Delta \mathbf{w}. \tag{20.10}$$

Вставляя это выражение в (20.6), получаем *дифференциальные уравнения упругих колебаний в перемещениях (Ламе)*, записанные в инвариантной форме:

$$\frac{1}{\rho}(\lambda + \mu)\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \theta + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{w} + \mathbf{Q} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \theta = \operatorname{div} \mathbf{w}. \tag{20.11}$$

Таким образом, неизвестной функцией является здесь лишь $\mathbf{w}(M, t)$.

Функция $\mathbf{Q}(M, t)$ и константа ρ предполагаются заданными. Кроме дифференциального уравнения на искомую функцию $\mathbf{w}$ накладываются обычно граничные и начальные условия, но этим мы заниматься не будем.