ГЛАВА II

АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО n ИЗМЕРЕНИЙ

Исходным пунктом всех геометрических теорий являются свойства протяженности материальных тел и притом в основном в том виде, как они были фиксированы в старейшей геометрической теории — в геометрии обычного трехмерного евклидова пространства. В частности, и аффинная геометрия имеет тот же источник; а именно, анализ различных геометрических свойств обычного пространства показывает, что они не все равноценны по степени своей устойчивости, по степени той прочности, с которой они связаны с геометрическими фигурами. Одни, как, например, отношение любым образом расположенных отрезков, величина угла, свойство фигуры быть кругом или шаром и т. д., сохраняются лишь при движениях пространства как твердого тела (и преобразованиях подобия); другие, более устойчивые, как, например, отношение параллельных отрезков, параллельность двух прямых, свойство фигуры быть прямой линией или плоскостью и т. д., сохраняются, кроме того, и при всех аффинных (линейных при записи в декартовых координатах) преобразованиях пространства. Этот, более глубоко лежащий и более прочно связанный с геометрическими фигурами класс свойств и образует аффинную геометрию, которой мы будем заниматься в этой главе.

Однако при построении аффинной геометрии мы не пойдем путем выделения аффинных свойств из числа евклидовых, напротив, мы сформулируем самостоятельную систему аксиом, достаточную для вывода всех аффинных свойств, и притом не только в трехмерном, но и в многомерном пространстве. Позже — уже в следующей главе — мы построим на этой базе и евклидово пространство путем введения добавочных аксиом.

§ 21. Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства

Основными понятиями, не подлежащими прямому логическому определению, будут служить у нас *точка* и *вектор*. (Это, конечно, не означает, что понятия точки и вектора будут лишены у нас содержания. В нашей теории они будут определены посредством перечисления их свойств в аксиомах. При этом мы считаем, что теория вещественных (равно как и комплексных) чисел уже построена.) Тогда нам достаточно принять следующие аксиомы.

1°. *Существует по меньшей мере одна точка.*

2°. *Каждой паре точек A, B, заданных в определенном порядке, поставлен в соответствие один и только один вектор.*

Этот вектор мы будем обозначать $\overrightarrow{AB}$, но, если понадобится, будем пользоваться обозначением и в виде отдельной (жирной) буквы **a**, **x** и т. п.

3°. *Для каждой точки A и каждого вектора* **x** *существует одна и только одна точка B такая, что*

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}. \qquad (21.1)$$

Знак $=$ между векторами (как и между числами) мы будем понимать в смысле тождества, например, в данном случае $=$ означает, что $\overrightarrow{AB}$ и **x** — это просто один и тот же вектор. В связи с этим нет надобности обосновывать особыми аксиомами свойства знака $=$ (например, транзитивность), так как это просто свойства логического тождества. В дальнейшем мы именно так со знаком $=$ и будем обращаться.

Следует подчеркнуть, что при наглядном истолковании нашей аксиоматики вектор выступает не в виде направленного отрезка, а в виде параллельного сдвига, которому подвергаются все точки пространства. Поэтому наглядный смысл аксиомы 2° состоит в существовании (единственного) параллельного сдвига, переводящего данную точку A в данную точку B, а аксиома 3° в сущности означает, что каждый вектор **x** реализуется в виде сдвига, а именно, каждой точке A ставит в соответствие определенную точку B согласно (21.1).

Конечно, очень полезно иметь в виду эти наглядные истолкования наших аксиом, но не нужно забывать, что мы дадим аксиоматику, достаточную для развертывания аффинной геометрии и независимо от каких-либо наглядных соображений (как и полагается делать при аксиоматическом построении математической теории).

4°. *(Аксиома параллелограмма.) Если*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \text{ то } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Очевидно, наглядный смысл аксиомы 4° в основном состоит в том, что при равенстве и параллелизме одной пары противоположных сторон четырехугольника то же имеет место и для другой пары.

Перечисленные четыре аксиомы образуют в известном смысле законченную часть нашей аксиоматики: остальные аксиомы относятся к умножению вектора на число и тем самым носят иной характер. Поэтому, прежде чем перечислять остальные аксиомы, рассмотрим следствия аксиом 1°—4°.

Теорема. *Векторы $\overrightarrow{AA}$ и $\overrightarrow{BB}$ для любых точек A, B равны между собой*:

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}. \tag{21.2}$$

Для доказательства достаточно применить аксиому 4°, положив $C \equiv A$, $D \equiv B$. Тогда, очевидно, справедливо равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (так как оно сводится к $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$), а следовательно, по аксиоме 4° справедливо и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, т. е. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Определение. Вектор $\overrightarrow{AA}$ (как было показано, один и тот же при любом выборе точки A) носит название *вектор-нуль* и обозначается

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}. \tag{21.3}$$

Откладывая вектор $\overrightarrow{0}$ от любой точки M, мы получаем в качестве результата вектор $\overrightarrow{MM}$. Действительно, этот последний вектор равен $\overrightarrow{0}$, а так как откладывание данного вектора происходит единственным образом (аксиома 3°), то других возможностей представиться не может.

Теорема. *Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.*

Доказательство. Применяя аксиому 4° к $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, получим $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, или, что то же, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, откуда снова в силу аксиомы 4° следует

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}.$$

Определение. *Вектор $\overrightarrow{BA}$ мы будем называть обратным по отношению к вектору $\overrightarrow{AB}$.* Вектор, обратный вектору $\mathbf{x}$, обозначаем $-\mathbf{x}$.

Для каждого вектора $\mathbf{x}$ существует один и только один обратный ему вектор $-\mathbf{x}$. Действительно, представляя $\mathbf{x}$ в различных видах

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \ldots,$$

мы тем не менее получим *лишь один* обратный вектор

$$-\mathbf{x} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} = \ldots$$

согласно только что доказанной теореме.

Определение. Пусть нам заданы два каких-нибудь вектора в определенном порядке, например, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Выберем произвольно точку A и отложим от нее вектор $\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}$ (аксиома 3°), а затем от точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \mathbf{y}$ (аксиома 3°). Точки A, C определяют вектор $\overrightarrow{AC}$ (аксиома 2°), который мы будем называть *суммой* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ вектора $\mathbf{x}$ и вектора $\mathbf{y}$ (именно в этом порядке взятых). Итак:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \overrightarrow{AC},$$

или, что то же,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. \tag{21.4}$$

Теорема. *Вектор* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *не зависит от выбора точки* A *(так что сложение векторов — операция однозначная).*

Доказательство. Повторим построение суммы при другом выборе точки A и, следовательно, с другими точками B и C. Новые точки будем обозначать штрихованными буквами. Тогда аналогично (21.4)

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'},$$

причем

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{x}, \quad \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{y}.$$

Отсюда согласно аксиоме 4° следует, что

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C}.$$

Применяя снова аксиому 4° к равенству

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C},$$

получаем:

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC},$$

т. е. результат сложения векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ не зависит от выбора начальной точки A.

Теорема. *Сложение векторов — операция коммутативная:*

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}. \tag{21.5}$$

Доказательство. Из произвольной точки A откладываем (аксиома 3°) $\overrightarrow{AB}=\mathbf{x}$, затем $\overrightarrow{BC}=\mathbf{y}$, так что

$$\overrightarrow{AC}=\mathbf{x}+\mathbf{y}, \tag{21.6}$$

кроме того, из той же точки A откладываем $\overrightarrow{AD}=\mathbf{y}$.

Так как $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\mathbf{y}$, то (аксиома 4°) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, т. е. $\overrightarrow{DC}=\mathbf{x}$. Можно считать, что из точки A отложен сначала вектор $\overrightarrow{AD}=\mathbf{y}$, а затем $\overrightarrow{DC}=\mathbf{x}$, так что по определению сложения

$$\overrightarrow{AC}=\mathbf{y}+\mathbf{x}. \tag{21.7}$$

Сравнивая равенство (21.7) с (21.6), получаем:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}.$$

Теорема. *Сложение векторов — операция ассоциативная:*

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}). \tag{21.8}$$

Доказательство буквально такое же, как и в элементарной векторной алгебре; повторять его мы не будем.

Ассоциативность сложения при любом числе слагаемых векторов является простым следствием соотношения (21.8).

Короче говоря, сложение векторов, как оно у нас установлено, обладает всеми обычными свойствами. В дальнейшем мы будем обращаться с ним столь же непринужденно, как и в обычной векторной алгебре (не делая каждый раз ссылок на соответствующие теоремы).

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{x}+\vec{0}=\mathbf{x}. \tag{21.9}$$

Действительно, представим вектор $\mathbf{x}$ (аксиома 3°) как $\overrightarrow{AB}$, а вектор $\vec{0}$ — как $\overrightarrow{BB}$. В силу (21.4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$, и тем самым $\mathbf{x}+\vec{0}=\mathbf{x}$.

Далее, всегда справедливо равенство

$$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\vec{0}. \tag{21.10}$$

Действительно, представим $\mathbf{x}$ как $\overrightarrow{AB}$; тогда $-\mathbf{x}$ по определению представится как $\overrightarrow{BA}$; но $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$ (согласно (21.4)), а значит, $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\vec{0}$.

Определение. *Вычесть вектор* $\mathbf{y}$ *из вектора* $\mathbf{x}$ *значит найти вектор* $\mathbf{z}$ *такой, что*

$$\mathbf{z}+\mathbf{y}=\mathbf{x}. \tag{21.11}$$

Вектор $\mathbf{z}$ мы будем называть *разностью* $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Теорема. *Вычитание — всегда выполнимая и притом однозначная операция.*

Доказательство. Допустим сначала, что разность $\mathbf{z}$ найдена. Добавим к обеим частям (21.11) вектор $-\mathbf{y}$. Получим:

$$\mathbf{z}+\mathbf{y}+(-\mathbf{y})=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}).$$

В силу ассоциативности сложения можно в левой части сложить сначала $\mathbf{y}$ и $-\mathbf{y}$. Это дает $\vec{0}$ в силу (21.10), после чего согласно (21.9) в левой части остается просто $\mathbf{z}$. Получаем в результате

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}),$$

т. е. если разность $\mathbf{z}$ существует, то она обязательно имеет такой вид. Остается показать, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$ действительно есть разность. Это легко проверить, складывая $\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$ с $\mathbf{y}$ и убеждаясь, что в результате получается $\mathbf{x}$. Итак,

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}). \tag{21.12}$$

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\vec{0}. \tag{21.13}$$

§ 22. Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства (окончание)

Мы переходим теперь ко второй группе аксиом, связанной с операцией умножения вектора на число. Под числами мы будем здесь понимать или вещественные числа — тогда полученное аффинное пространство называется *вещественным* — или комплексные числа — тогда полученное аффинное пространство называется *комплексным*. В изложении мы не будем разделять эти два случая до тех пор, пока разница между ними не начнет сказываться (а это наступит еще не скоро).

Если мы изучаем вещественное аффинное пространство, то везде в дальнейшем изложении (а не только в формулировке аксиом) под «числами», «численными значениями функций» и т. п. нужно понимать вещественные числа; если же речь идет о комплексном аффинном пространстве, то везде имеются в виду комплексные числа. Можно употреблять вместо чисел вообще элементы некоторого ал-