Определение. *Вычесть вектор* $\mathbf{y}$ *из вектора* $\mathbf{x}$ *значит найти вектор* $\mathbf{z}$ *такой, что*

$$\mathbf{z}+\mathbf{y}=\mathbf{x}. \tag{21.11}$$

Вектор $\mathbf{z}$ мы будем называть *разностью* $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

Теорема. *Вычитание — всегда выполнимая и притом однозначная операция.*

Доказательство. Допустим сначала, что разность $\mathbf{z}$ найдена. Добавим к обеим частям (21.11) вектор $-\mathbf{y}$. Получим:

$$\mathbf{z}+\mathbf{y}+(-\mathbf{y})=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}).$$

В силу ассоциативности сложения можно в левой части сложить сначала $\mathbf{y}$ и $-\mathbf{y}$. Это дает $\vec{0}$ в силу (21.10), после чего согласно (21.9) в левой части остается просто $\mathbf{z}$. Получаем в результате

$$\mathbf{z}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}),$$

т. е. если разность $\mathbf{z}$ существует, то она обязательно имеет такой вид. Остается показать, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$ действительно есть разность. Это легко проверить, складывая $\mathbf{x}+(-\mathbf{y})$ с $\mathbf{y}$ и убеждаясь, что в результате получается $\mathbf{x}$. Итак,

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y}). \tag{21.12}$$

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}=\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\vec{0}. \tag{21.13}$$

§ 22. Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства (окончание)

Мы переходим теперь ко второй группе аксиом, связанной с операцией умножения вектора на число. Под числами мы будем здесь понимать или вещественные числа — тогда полученное аффинное пространство называется *вещественным* — или комплексные числа — тогда полученное аффинное пространство называется *комплексным*.

В изложении мы не будем разделять эти два случая до тех пор, пока разница между ними не начнет сказываться (а это наступит еще не скоро).

Если мы изучаем вещественное аффинное пространство, то везде в дальнейшем изложении (а не только в формулировке аксиом) под «числами», «численными значениями функций» и т. п. нужно понимать вещественные числа; если же речь идет о комплексном аффинном пространстве, то везде имеются в виду комплексные числа. Можно употреблять вместо чисел вообще элементы некоторого алгебраического поля — тогда мы получим аффинное пространство над этим полем. Последнее построение нам, впрочем, не понадобится.

5°. *Каждому вектору* $\mathbf{x}$ *и каждому числу* α *поставлен в соответствие определенный вектор*. Этот вектор мы будем обозначать $\alpha\mathbf{x}$ и называть *произведением* вектора $\mathbf{x}$ на число α.

6°. $$1\mathbf{x} = \mathbf{x}. \tag{22.1}$$

Важнейшее значение этой аксиомы не в том, что умножение на единицу не меняет вектора, а в том, что различными произведениями векторов на числа можно исчерпать все векторы (а не только их подмножество, как это было бы возможно, если бы аксиому 6° исключить).

7°. $$(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}. \tag{22.2}$$

8°. $$\alpha\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}. \tag{22.3}$$

Аксиомы 7° и 8° выражают два *дистрибутивных* закона: один — для умножения вектора на сумму чисел, другой — для умножения суммы векторов на число. Из них немедленно следуют аналогичные правила при любом числе слагаемых.

9°. $$\alpha\,(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{x}, \tag{22.4}$$

т. е. последовательное умножение вектора на числа β и α сводится к его умножению на их произведение.

Выведем некоторые следствия. Прежде всего при любом $\mathbf{x}$

$$0\mathbf{x} = \vec{0}. \tag{22.5}$$

В самом деле, взяв произвольное число α, составим выражение

$$\alpha\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (\alpha + 0)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}. \tag{22.6}$$

Мы воспользовались здесь аксиомой 7°. То, что $\alpha + 0 = \alpha$, разумеется, нам известно из арифметики чисел и здесь в обосновании не нуждается. Итак,

$$\alpha\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}, \text{ т. е. } 0\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \vec{0}.$$

согласно (21.13). Тем самым (22.5) доказано.

Далее, отметим, что при любом α

$$\alpha\vec{0} = \vec{0}. \tag{22.7}$$

Действительно, взяв произвольный вектор $\mathbf{x}$, составим выражение

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha\vec{0} = \alpha\,(\mathbf{x} + \vec{0}) = \alpha\mathbf{x}.$$

Мы воспользовались здесь сначала аксиомой 8°, затем свойством (21.9). Получаем, что

$$\alpha\vec{0} = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \vec{0},$$

и (22.7) доказано.

Очевидно, что установленные нами аксиомы и их следствия позволяют беспрепятственно производить по обычным правилам выкладки над векторами с участием операций сложения и умножения на число. Мы и будем в дальнейшем это делать уже без скрупулезных ссылок на аксиомы. Но еще одну очень важную аксиому, которой нам не хватает, мы должны сейчас рассмотреть.

Речь идет о том, что наши аксиомы справедливы для точек и векторов аффинного пространства любого числа измерений $n = 0, 1, 2, \ldots$ и даже $n = \infty$. Поэтому, если мы хотим остановиться на пространстве определенного числа измерений, то нам придется ввести еще одну соответствующую аксиому. Но предварительно нужно сформулировать важные понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение. *Пусть дано некоторое число векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$. *Эти векторы называются линейно зависимыми, если можно подобрать числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *так, чтобы имело место соотношение*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m = \vec{0}, \tag{22.8}$$

причем среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *хоть одно не равно нулю. Если же таких чисел подобрать нельзя, то векторы* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *называются линейно независимыми.*

Смысл линейной зависимости векторов состоит в следующем. Так как в соотношении (22.8), по крайней мере, один коэффициент отличен от нуля, то будем считать для определенности $\alpha_1 \neq 0$. Прибавив к обеим частям равенства (22.8) вектор $-\alpha_1\mathbf{x}_1$, получим:

$$\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m = -\alpha_1\mathbf{x}_1.$$

Умножим полученное равенство на $-\frac{1}{\alpha_1}$ почленно:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_1.$$

Обозначая для краткости

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_2, \ \ldots, \ -\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \beta_m,$$

можно записать окончательно

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{x}_m. \tag{22.9}$$

Таким образом, при линейной зависимости векторов один из них (но, вообще говоря, не любой!) может быть выражен в виде линейной комбинации остальных, т. е., говоря коротко, разложен по ним.

Обратное также верно: разложение вида (22.9) означает, очевидно, наличие линейной зависимости между $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Обращая эту характеристику линейной зависимости, получаем, что линейная независимость векторов равносильна тому, что ни один из них не может быть разложен по остальным, так что все они играют, так сказать, самостоятельную роль.

Теперь мы можем сформулировать аксиому размерности.

10° *(Аксиома размерности). Существует n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов линейно зависимы между собой.*

Целым неотрицательным числом n можно задаться произвольно, так что аксиома размерности существует в бесчисленном количестве вариантов. *Мы будем называть n-мерным аффинным пространством множество точек и векторов, удовлетворяющих аксиомам* 1°—10°. Чем больше n, тем большее многообразие векторов, а следовательно, и точек мы имеем в своем распоряжении.

Важно заметить, что аксиома 1° гарантирует нам существование лишь одной точки (обозначим ее A), а следовательно (совместно с 2°), и лишь одного вектора $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. То, что у нас имеются и другие точки и векторы, вытекает исключительно из первой половины аксиомы размерности и притом в случае $n>0$. Если же $n=0$, то из аксиомы размерности следует, напротив, что всякий вектор $\mathbf{x}$ «линейно зависимый», т. е., попросту говоря, совпадает с $\vec{0}$, и точка A — единственная; *нульмерное аффинное пространство содержит лишь одну точку A и один вектор $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.*

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, случай $n>0$.

Мы получили довольно простую и легко обозримую аксиоматику n-мерного аффинного пространства. Это объясняется отчасти элементарностью самого предмета, отчасти тем, что мы допустили некоторую хитрость, включив в аксиоматику операцию с участием *числа*. Если бы мы задались целью построить *чисто геометрическую* аксиоматику, то дело не обошлось бы так просто.

Не следует рассматривать нашу аксиоматику как нечто особенно принципиальное и глубокое. Мы хотели сказать ею лишь то, что в n-мерном аффинном пространстве можно обращаться с точками и векторами в основном так же, как и в обычной векторной алгебре (в ее аффинной части), с тем лишь отличием, что максимальное число линейно независимых векторов — не обязательно три, а любое n.

И именно, чтобы сказать это, мы перечислили те основные свойства точек и векторов, из которых очевидным образом можно вывести все остальные их (аффинные) свойства. Это перечисление и составило нашу аксиоматику.

§ 23. Аффинная координатная система

Цель этого параграфа — рассмотреть в n-мерном аффинном пространстве наиболее естественные координатные системы, геометрически связанные со свойствами пространства. Указания для первой ориентации в этом направлении дает нам аксиома размерности.

В самом деле, согласно ей в нашем пространстве существует n линейно независимых векторов. Выберем их каким-нибудь образом и обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Присоединяя к этим векторам *любой вектор* $\mathbf{x}$, мы получим $n+1$ уже линейно зависимых векторов согласно второй половине аксиомы.

Запишем эту линейную зависимость

$$\alpha\mathbf{x}+\alpha_1\mathbf{e}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n=0 \qquad (23.1)$$

(начиная с этого параграфа, мы перестаем писать стрелку над вектором-нуль).

Мы утверждаем, что $\alpha\neq 0$. Действительно, если бы $\alpha=0$, то у нас осталась бы линейная зависимость между $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, что противоречит выбору этих векторов. Выражая теперь из нашей линейной зависимости $\mathbf{x}$ через остальные векторы, мы получаем его разложение (совершенно аналогично выводу (22.9) из (22.8)):

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2+\ldots+x^n\mathbf{e}_n. \qquad (23.2)$$

Через $x^1, x^2, \ldots, x^n$ обозначены коэффициенты разложения; $x^1=-\frac{\alpha_1}{\alpha}$ и т. д. Запись индекса наверху является не случайной; она, как мы увидим, будет указывать на характер преобразования этих коэффициентов.

Итак, *любой вектор n-мерного аффинного пространства может быть разложен по n как-либо выбранным линейно независимым векторам.*

В случае $n=1$ любой вектор $\mathbf{x}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1, \qquad (23.3)$$

что соответствует положению вещей на прямой линии, где все векторы коллинеарны между собой.

В случае $n=2$ любой вектор $\mathbf{x}$ разлагается по двум данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2, \qquad (23.4)$$