И именно, чтобы сказать это, мы перечислили те основные свойства точек и векторов, из которых очевидным образом можно вывести все остальные их (аффинные) свойства. Это перечисление и составило нашу аксиоматику.

§ 23. Аффинная координатная система

Цель этого параграфа — рассмотреть в n-мерном аффинном пространстве наиболее естественные координатные системы, геометрически связанные со свойствами пространства. Указания для первой ориентации в этом направлении дает нам аксиома размерности.

В самом деле, согласно ей в нашем пространстве существует n линейно независимых векторов. Выберем их каким-нибудь образом и обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Присоединяя к этим векторам *любой вектор* $\mathbf{x}$, мы получим $n+1$ уже линейно зависимых векторов согласно второй половине аксиомы.

Запишем эту линейную зависимость

$$\alpha\mathbf{x}+\alpha_1\mathbf{e}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{e}_n=0 \tag{23.1}$$

(начиная с этого параграфа, мы перестаем писать стрелку над вектором-нуль).

Мы утверждаем, что $\alpha\neq 0$. Действительно, если бы $\alpha=0$, то у нас осталась бы линейная зависимость между $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, что противоречит выбору этих векторов. Выражая теперь из нашей линейной зависимости $\mathbf{x}$ через остальные векторы, мы получаем его разложение (совершенно аналогично выводу (22.9) из (22.8)):

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2+\ldots+x^n\mathbf{e}_n. \tag{23.2}$$

Через $x^1, x^2, \ldots, x^n$ обозначены коэффициенты разложения; $x^1=-\frac{\alpha_1}{\alpha}$ и т. д. Запись индекса наверху является не случайной; она, как мы увидим, будет указывать на характер преобразования этих коэффициентов.

Итак, *любой вектор n-мерного аффинного пространства может быть разложен по n как-либо выбранным линейно независимым векторам.*

В случае $n=1$ любой вектор $\mathbf{x}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1, \tag{23.3}$$

что соответствует положению вещей на прямой линии, где все векторы коллинеарны между собой.

В случае $n=2$ любой вектор $\mathbf{x}$ разлагается по двум данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2, \tag{23.4}$$

что дает картину плоскости, аффинную геометрию которой мы в этом случае и получаем.

В случае $n=3$ любой вектор $\mathbf{x}$ можно разложить по трем данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+x^2\mathbf{e}_2+x^3\mathbf{e}_3. \tag{23.5}$$

Геометрия трехмерного аффинного пространства, которую мы в этом случае получаем, и есть геометрия нашего обычного пространства с сохранением лишь ее аффинных свойств (о чем шла речь в начале этой главы).

Возвращаемся к n-мерному случаю. Мы будем называть *аффинным репером* совокупность какой-нибудь точки O (начало репера) и каких-нибудь n занумерованных линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (которые для наглядности будем представлять себе отложенными из начала O).

Пусть некоторый аффинный репер нам задан. Тогда любой вектор $\mathbf{x}$ разлагается по векторам репера согласно (23.2). *Коэффициенты разложения $x^1, x^2, \ldots, x^n$ мы будем называть аффинными координатами вектора* $\mathbf{x}$ *относительно данного репера.*

Эти координаты определяются единственным образом. В самом деле, если бы вектор $\mathbf{x}$ допускал два *различных* разложения

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n=\tilde{x}^1\mathbf{e}_1+\ldots+\tilde{x}^n\mathbf{e}_n,$$

где не все x^i были бы равны соответствующим $\tilde{x}^i$, то оказалось бы, что $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно зависимы, так как

$$(x^1-\tilde{x}^1)\,\mathbf{e}_1+\ldots+(x^n-\tilde{x}^n)\,\mathbf{e}_n=0;$$

но это невозможно.

Обратно, вектор $\mathbf{x}$ однозначно определяется своими координатами согласно (23.2), так что соответствие между векторами $\mathbf{x}$ и совокупностями их координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ является взаимно однозначным. В частности, вектор-нуль имеет все координаты, равные нулю.

Посмотрим, как выглядят операции над векторами с точки зрения их координатного задания. Пусть даны два вектора:

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n, \tag{23.6}$$
$$\mathbf{y}=y^1\mathbf{e}_1+\ldots+y^n\mathbf{e}_n. \tag{23.7}$$

Складывая эти равенства почленно и преобразуя правую часть при помощи известных нам правил, получим:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x^1+y^1)\,\mathbf{e}_1+\ldots+(x^n+y^n)\,\mathbf{e}_n. \tag{23.8}$$

Это означает, что *координаты суммы двух (и аналогично нескольких) векторов получаются сложением соответствующих координат этих векторов.*

Далее, умножая (23.6) на какое-либо число α, мы получим:

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha x^n\mathbf{e}_n. \tag{23.9}$$

Это означает, что при умножении вектора на число α каждая его координата умножается на это число.

Объединяя операции сложения и умножения на число, рассмотрим составление линейной комбинации данных векторов. Пусть нам дано m векторов:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= x_1^1\mathbf{e}_1 + x_1^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_1^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{x}_2 &= x_2^1\mathbf{e}_1 + x_2^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_2^n\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x}_m &= x_m^1\mathbf{e}_1 + x_m^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_m^n\mathbf{e}_n. \end{aligned}\right\} \tag{23.10}$$

Составим их линейную комбинацию $\mathbf{x}$ с произвольными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m. \tag{23.11}$$

Умножая разложения (23.10) соответственно на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и складывая почленно, убеждаемся, что координаты нашей линейной комбинации $\mathbf{x}$:

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^n \tag{23.12}$$

образуют линейную комбинацию строк матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1^1 x_1^2 \ldots x_1^n \\ x_2^1 x_2^2 \ldots x_2^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_m^1 x_m^2 \ldots x_m^n \end{matrix} \right\| \tag{23.13}$$

с теми же коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, а именно:

$$x^i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \ldots + \alpha_m x_m^i. \tag{23.14}$$

Пусть векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *линейно зависимы*. Тогда коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (не обращающиеся одновременно в нуль) можно подобрать так, что будет равна нулю линейная комбинация $\mathbf{x}$, а вместе с нею и все ее координаты (23.12). Это значит, что обращается в нуль линейная комбинация строк матрицы (23.13), а следовательно, *между строками этой матрицы имеется линейная зависимость*.

Существование линейной зависимости между строками матрицы (23.13) *не только необходимо, но и достаточно для линейной зависимости векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, в чем сейчас же убеждаемся, проводя рассуждение в обратном порядке.

Мы ввели координаты для векторов; но это нетрудно теперь сделать и для точек. Пусть M — любая точка нашего пространства. Ей однозначно отвечает вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — начало репера. Этот вектор мы будем называть *радиусом-вектором* данной точки; он, как и всякий вектор, обладает определенными координатами x^1, x^2, ..., x^n относительно нашего аффинного репера:

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n. \qquad (23.15)$$

Аффинными координатами точки M относительно данного репера мы будем называть аффинные координаты x^1, ..., x^n ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно того же репера.

Очевидно, таким образом, что координаты данной точки M определяются однозначно. Обратно, при задании координат x^1, ..., x^n радиус-вектор точки M однозначно определяется согласно (23.15), а откладывая его затем от начала O, мы однозначно определим точку M.

Таким образом, задание аффинного репера влечет построение аффинной координатной системы и для векторов и для точек.

Если точки A и B имеют соответственно координаты x^i и y^i, то такие же координаты имеют и векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, а так как

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},$$

то

$$y^i = x^i + z^i,$$

где z^i — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, и окончательно

$$z^i = y^i - x^i.$$

Аффинные координатные системы наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами рассматриваемого нами n-мерного аффинного пространства, хотя в нем возможны и другие (криволинейные) координатные системы.

На протяжении этой главы мы будем рассматривать только аффинные координатные системы и *под словами «координатная система» всегда будем понимать аффинную координатную систему.*

§ 24. Преобразование аффинного репера

Естественно возникает вопрос, с какой степенью произвола можно выбирать аффинный репер и каким образом переходить от одного репера к другому. Мы займемся вопросом о преобразовании векторов репера $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$, так как в связи с переносом его