Мы ввели координаты для векторов; но это нетрудно теперь сделать и для точек. Пусть M — любая точка нашего пространства. Ей однозначно отвечает вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — начало репера. Этот вектор мы будем называть *радиусом-вектором* данной точки; он, как и всякий вектор, обладает определенными координатами x^1, x^2, ..., x^n относительно нашего аффинного репера:

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n. \qquad (23.15)$$

Аффинными координатами точки M относительно данного репера мы будем называть аффинные координаты x^1, ..., x^n ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно того же репера.

Очевидно, таким образом, что координаты данной точки M определяются однозначно. Обратно, при задании координат x^1, ..., x^n радиус-вектор точки M однозначно определяется согласно (23.15), а откладывая его затем от начала O, мы однозначно определим точку M.

Таким образом, задание аффинного репера влечет построение аффинной координатной системы и для векторов и для точек.

Если точки A и B имеют соответственно координаты x^i и y^i, то такие же координаты имеют и векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, а так как

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},$$

то

$$y^i = x^i + z^i,$$

где z^i — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, и окончательно

$$z^i = y^i - x^i.$$

Аффинные координатные системы наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами рассматриваемого нами n-мерного аффинного пространства, хотя в нем возможны и другие (криволинейные) координатные системы.

На протяжении этой главы мы будем рассматривать только аффинные координатные системы и *под словами «координатная система» всегда будем понимать аффинную координатную систему.*

§ 24. Преобразование аффинного репера

Естественно возникает вопрос, с какой степенью произвола можно выбирать аффинный репер и каким образом переходить от одного репера к другому. Мы займемся вопросом о преобразовании векторов репера $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$, так как в связи с переносом его начала O никаких вопросов не возникает: начало O можно по желанию передвигать в любое положение. Кроме того, как мы увидим, в интересующих нас вопросах выбор начала O большей частью будет безразличен. Дело в том, что мы будем пользоваться координатами не столько для точек, сколько для векторов, а в этом случае положение начала O совершенно не играет роли.

Пусть $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, ..., $\mathbf{e}_{n'}$ — это 1-й, 2-й, ..., n-й векторы некоторого нового аффинного репера, занумерованные для отличия штрихованными индексами.

Каждый из этих векторов согласно (23.2) может быть разложен по векторам старого репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Коэффициенты этих разложений мы будем обозначать буквой A с соответствующими индексами:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= A_{1'}^1\mathbf{e}_1 + A_{1'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{1'}^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}_{2'} &= A_{2'}^1\mathbf{e}_1 + A_{2'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{2'}^n\mathbf{e}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}_{n'} &= A_{n'}^1\mathbf{e}_1 + A_{n'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{n'}^n\mathbf{e}_n, \end{aligned}\right\} \tag{24.1}$$

или, объединяя эти формулы в общей записи, можно написать:

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^1\mathbf{e}_1 + A_{i'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{i'}^n\mathbf{e}_n. \tag{24.2}$$

В этом равенстве, как и во всех дальнейших, мы будем подразумевать, что буквенному индексу, встречающемуся по одному разу в каждом одночленном выражении, можно давать любые значения 1, 2, ..., n, т. е. что фактически имеется в виду не одно, а n равенств (если такой индекс один).

В нашем случае имеется буквенный индекс i', которому, как мы подразумеваем, по очереди придаются значения $1'$, $2'$, ..., n'. В результате (24.2) означает в краткой записи то же самое, что и (24.1).

Нетрудно заметить, что при помощи знака $\sum$ можно записать (24.2) следующим образом:

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_{i'}^i\mathbf{e}_i. \tag{24.3}$$

Суммирование происходит здесь лишь по нештрихованному индексу i, в то время как индекс i' сохраняет постоянное значение. Таким образом, здесь и в аналогичных случаях дальше мы позволяем себе рассматривать буквенные индексы, обозначенные одной и той же буквой, но в одном случае штрихованной, а в другом — нештрихованной (как сейчас у нас i и i'), *как принимающие значения один независимо от другого.*

То, что индекс суммирования i встречается дважды, один раз наверху, а другой раз внизу, является, как мы дальше увидим, далеко не случайным. Такого типа суммы нам будут встречаться часто, и для сокращения записи мы условимся в этих случаях опускать знак $\sum$. Так, (24.3) мы будем записывать просто:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^{i}_{i'}\mathbf{e}_{i}, \tag{24.4}$$

подразумевается суммирование по i от 1 до n. Общее правило: *пусть дано выражение, записанное в виде буквы, снабженной индексами; пусть при этом какой-либо буквенный индекс встречается дважды, один раз вверху и один раз внизу; тогда мы будем считать, что написанное обозначает сумму этого рода выражений для значений* 1, 2, ..., n, *пробегаемых данным индексом. Если таких* (*встречающихся один раз вверху и один раз внизу*) *индексов несколько, то подразумевается суммирование по каждому из них.*

Например, выражение Φ^{ik}_{ikl} мы будем понимать так:

$$\Phi^{ik}_{ikl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Phi^{ik}_{ikl}, \tag{24.5}$$

так что фактически это выражение будет зависеть лишь от одного индекса, именно l, который мы будем называть *свободным* в отличие от индексов *суммирования*.

В связи со сказанным обозначения индексов суммирования не играют, конечно, никакой роли; так, если вместо Φ^{ik}_{ikl} написать, например, Φ^{pq}_{pql}, обозначив индексы суммирования p, q вместо i, k, то по смыслу равенства (24.5) результат нисколько не изменится:

$$\Phi^{ik}_{ikl} = \Phi^{pq}_{pql}.$$

Этим обстоятельством мы часто будем впоследствии пользоваться в процессе выкладок.

Все, что было только что сказано относительно сокращенной записи суммы для выражений, обозначенных просто буквой с индексами, полностью относится и к произведениям такого рода выражений. Пример сокращенной записи в этом случае мы имеем уже в формуле (24.4).

Позже мы узнаем принципиальный смысл суммирования указанного типа и тогда уточним и употребление нашего сокращенного обозначения.

Возвращаемся теперь к вопросу преобразования аффинного репера. Векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$ могут быть выбраны произвольно с единственным условием линейной независимости. Но линейная независимость векторов $\mathbf{e}_{i'}$ равносильна линейной независимости строк матрицы преобразования (24.1):

$$\begin{Vmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 & \dots & A_{1'}^n \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 & \dots & A_{2'}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n'}^1 & A_{n'}^2 & \dots & A_{n'}^n \end{Vmatrix} \tag{24.6}$$

(ср. с (23.13)). Другими словами, соответствующий определитель должен быть отличным от нуля:

$$\operatorname{Det} | A_{i'}^i | \neq 0. \tag{24.7}$$

Это и есть единственное условие, наложенное на преобразование векторов репера (24.1). В остальном коэффициенты $A_{i'}^i$ произвольны. Тем самым матрица (24.6) допускает обратную матрицу, элементы которой мы будем обозначать $A_i^{i'}$ (штрихованный индекс наверху!):

$$\begin{Vmatrix} A_1^{1'} & A_1^{2'} & \dots & A_1^{n'} \\ A_2^{1'} & A_2^{2'} & \dots & A_2^{n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^{1'} & A_n^{2'} & \dots & A_n^{n'} \end{Vmatrix}. \tag{24.8}$$

Если, обратно, выразить векторы старого репера $\mathbf{e}_i$ через векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$, то придется применить преобразование, обратное преобразованию (24.1), для чего надо воспользоваться вместо матрицы (24.6) обратной матрицей (24.8). В краткой записи, аналогичной (24.4), мы получим:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \tag{24.9}$$

По общему соглашению здесь имеется в виду суммирование по индексу i', так что в подробной записи получаем:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{1'} \mathbf{e}_{1'} + A_i^{2'} \mathbf{e}_{2'} + \dots + A_i^{n'} \mathbf{e}_{n'}.$$

Здесь i нужно давать поочередно значения $1, 2, \dots, n$. То, что матрицы (24.6) и (24.8) *взаимно обратные*, означает, что их произведение, в том или другом порядке, дает единичную матрицу. Элементы единичной матрицы мы будем стандартно обозначать

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

так что связь $A_i^{i'}$ и $A_{i'}^i$ можно записать так:

$$A_k^{i'} A_{i'}^k = \delta_{i'}^{i'}, \qquad A_{k'}^i A_i^{k'} = \delta_i^i. \tag{24.10}$$

По k, равно как и по k', предполагается суммирование от 1 до n по общему соглашению.

Эти формулы можно также получить, подставляя в (24.9) выражение $\mathbf{e}_{i'}$ согласно (24.4) (заменив лишь обозначение индекса суммирования i на какое-нибудь другое, например, j), получим:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} A_{i'}^j \mathbf{e}_j.$$

В правой части подразумевается двойное суммирование: по индексам j и i'.

Так как разложение по векторам репера совершается единственным образом, то коэффициенты при $\mathbf{e}_j$ в правой части должны равняться соответствующим коэффициентам в левой части, т. е. нулю, если $j \neq i$, и единице, если $j = i$. В результате

$$A_{i'}^j A_i^{i'} = \delta_i^j,$$

что дает вторую из формул (24.10). Аналогично получается и первая из формул (24.10) — подстановкой (24.9) в (24.4).

При переходе к новому реперу каждый вектор $\mathbf{x}$ получает новые координаты, которые мы будем обозначать $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ в отличие от старых $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Разумеется, что при этом сам вектор $\mathbf{x}$ остается прежним, и изменение координат идет лишь за счет изменения репера.

Спрашивается, как будут выражаться новые координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ через старые, и обратно.

По определению координат вектора мы имеем в старом репере

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n = x^i\mathbf{e}_i \tag{24.11}$$

и аналогично в новом репере

$$\mathbf{x} = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \ldots + x^{n'}\mathbf{e}_{n'} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \tag{24.12}$$

В правых частях мы прибегли к сокращенной записи с опусканием знака суммы.

Теперь, чтобы решить нашу задачу, мы должны сравнить оба разложения, а для этого вставим в (24.11) выражение $\mathbf{e}_i$ согласно (24.9). Тогда (24.11) принимает вид

$$\mathbf{x} = x^i A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \tag{24.13}$$

Здесь происходит двойное суммирование: по i и по i'.

Сравнивая разложения (24.12) и (24.13), мы должны приравнять коэффициенты при $\mathbf{e}_{i'}$ ввиду единственности разложения вектора $\mathbf{x}$ по векторам репера. Получим:

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i, \tag{24.14}$$

где по i происходит суммирование, так что в подробной записи

$$x^{i'} = A_1^{i'} x^1 + A_2^{i'} x^2 + \ldots + A_n^{i'} x^n. \tag{24.15}$$

Совершенно аналогично при помощи обратного преобразования выразятся старые координаты через новые:

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'}. \tag{24.16}$$

Весьма важно для дальнейшего сравнить формулы преобразования *векторов репера* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *и координат инвариантного вектора* $x^1, \ldots, x^n$. Для определенности рассматриваем в обоих случаях переход именно от старого репера к новому и сравниваем формулы (24.4) и (24.14). Мы видим, что матрицы этих преобразований различны, а именно матрица преобразования (24.14) есть *транспонированная обратная матрица* преобразования (24.4) (такие преобразования называются *контрагредиентными*).

Действительно, матрица преобразования (24.14) (как особенно ясно видно из записи (24.15)) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & \ldots & A_n^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & \ldots & A_n^{2'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{n'} & A_2^{n'} & \ldots & A_n^{n'} \end{Vmatrix}, \tag{24.17}$$

т. е. получается транспонированием (поворотом на 180° вокруг главной диагонали) матрицы (24.8), а эта последняя матрица — взаимно обратная с матрицей (24.6) преобразования (24.4).

Формулы преобразования *векторов репера и координат инвариантного вектора* при переходе от старого репера к новому

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \tag{24.18}$$

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i \tag{24.19}$$

являются фундаментальными для тензорного исчисления. Они лежат в основе всех остальных тензорных законов преобразования.

Таким образом, преобразование *векторов репера* совершается при помощи произвольной неособенной матрицы ($\mathrm{Det}|A^i_{i'}| \neq 0$), а преобразование *координат вектора* — при помощи транспонированной обратной матрицы.

Мы занимались до сих пор преобразованиями координат вектора, а не точки. Если меняются лишь векторы репера, а начало O остается неподвижным, то координаты каждой *точки* M меняются так же, как и координаты ее (неизменного в этом случае) радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. по закону (24.19). Если же, кроме того, и начало O испытывает сдвиг на вектор $\mathbf{a}$, то радиусы-векторы всех точек M изменяются вследствие этого на вектор $-\mathbf{a}$ и тем самым координаты x^i всех точек M увеличиваются на $A^{i'}$, где $A^{i'}$ — координаты вектора $-\mathbf{a}$. В результате окончательная формула для преобразования координат x^i неподвижной точки M имеет вид

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}. \tag{24.20}$$