§ 25. Задача тензорного исчисления

Прежде чем приступить к построению тензорного аппарата,— а к этому мы уже вплотную подошли,— постараемся уяснить себе в общих чертах его цели.

Исходным пунктом нашего построения n-мерного аффинного пространства послужила аксиоматика векторного исчисления (в его аффинной части). Векторное исчисление представляет собой важнейший пример прямого геометрического исчисления: и объекты его и операции носят непосредственно геометрический характер. Всякое вычисление, проводимое в векторах, может быть истолковано как геометрическое построение.

Вместе с тем большую и часто ведущую роль в геометрии играет координатный метод. Здесь геометрические образы изучаются не непосредственно геометрически, а методами алгебры (аналитическая геометрия), а затем и анализа (дифференциальная геометрия). Огромная сила этого метода основана на том, что он применяет к геометрии сильный, хорошо развитый вычислительный аппарат алгебры и анализа. В результате удается ставить и решать вопросы, лишь малая часть которых укладывается в сравнительно узкие рамки прямых геометрических методов.

Однако эти успехи достаются недаром. В основе координатного метода всегда лежит условность, заключающаяся в приписывании каждой точке (или вектору и т. п.) координат, например, аффинных координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, как сделали мы в этой главе для точек и векторов n-мерного аффинного пространства. Но сама точка (или вектор) никоим образом не порождает эти n чисел; чтобы получить такой результат, нужно, как мы видели, задаться некоторым репером, т. е. некоторой аффинной координатной системой, а аффинный репер можно выбирать с большим произволом, вне связи с изучаемыми геометрическими образами.

Аналогичным образом дело обстоит и во всех случаях применения координатного метода: *на изучаемую геометрическую картину накладывается случайный выбор координатной системы, и те аналитические данные, которые мы получаем, отражают не только то, что нас интересует (геометрическую картину), но и то, что нас вовсе не интересует (произвольный выбор координатной системы) и что без надобности усложняет результаты* *).

Приведем элементарный пример: в обычном пространстве в прямоугольных декартовых координатах вектор, соединяющий точки $M_1(1, -2, 3)$ и $M_2(2, -2, 5)$, имеет координаты $(1, 0, 2)$. В этом результате то обстоятельство, что вторая координата вектора равна

*) Конечно, иногда возможно вполне естественным образом приспособить выбор координатной системы к самой геометрической задаче; но, как правило, это не имеет места.

нулю, является случайным, зависящим от выбора координатной системы. Напротив, выражение $1^2+0^2+2^2$ не случайно дает 5. И в любой другой прямоугольной системе координат мы получим тот же результат, хотя координаты вектора будут уже другие. Первое обстоятельство не имеет геометрического смысла для вектора самого по себе, второе — имеет (получается квадрат длины).

Возникает потребность и в сложных построениях *научиться отделять геометрически существенно важное от случайно привнесенного выбором координатной системы.*

Решением этой задачи и занимается тензорное исчисление. Общая схема его построения такова.

Строятся прежде всего тензоры, т. е. системы величин, отражающие определенные геометрические (или физические) конструкции и преобразующиеся по некоторому простому закону при переходе от одной координатной системы к другой. Далее, между тензорами вводятся операции и соотношения инвариантного характера, т. е. сохраняющие свой вид при переходе в любую другую координатную систему. Таким образом, все соотношения пишутся в форме, годной не только в избранной, но и в любой координатной системе, а значит, эти соотношения отражают геометрические (или физические) факты, независимые от выбора определенной координатной системы; искажающее влияние случайного выбора этой системы устраняется.

Из дальнейшего будет видно, каким образом целый ряд геометрических и физических вопросов поддается именно этой трактовке.

§ 26. Понятие о ковариантном тензоре

Мы рассмотрим сначала *одновалентный ковариантный тензор.* Он появляется наиболее естественным образом в связи с линейной скалярной функцией вектора.

Пусть каждому вектору $\mathbf{x}$ *поставлено в соответствие число* φ

$$\varphi=\varphi(\mathbf{x}) \tag{26.1}$$

таким образом, что для любых двух векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$

$$\varphi(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\varphi(\mathbf{x}_1)+\varphi(\mathbf{x}_2) \tag{26.2}$$

и для любого числа α

$$\varphi(\alpha\mathbf{x})=\alpha\varphi(\mathbf{x}). \tag{26.3}$$

Тогда $\varphi(\mathbf{x})$ *называется линейной функцией вектора* $\mathbf{x}$.

Будем рассматривать $\varphi(\mathbf{x})$ в какой-нибудь координатной системе, т. е. будем задавать аргумент $\mathbf{x}$ его координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и выражать $\varphi(\mathbf{x})$ как функцию этих координат. Так как

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n,$$