нулю, является случайным, зависящим от выбора координатной системы. Напротив, выражение $1^2+0^2+2^2$ не случайно дает 5. И в любой другой прямоугольной системе координат мы получим тот же результат, хотя координаты вектора будут уже другие. Первое обстоятельство не имеет геометрического смысла для вектора самого по себе, второе — имеет (получается квадрат длины).

Возникает потребность и в сложных построениях *научиться отделять геометрически существенно важное от случайно привнесенного выбором координатной системы.*

Решением этой задачи и занимается тензорное исчисление. Общая схема его построения такова.

Строятся прежде всего тензоры, т. е. системы величин, отражающие определенные геометрические (или физические) конструкции и преобразующиеся по некоторому простому закону при переходе от одной координатной системы к другой. Далее, между тензорами вводятся операции и соотношения инвариантного характера, т. е. сохраняющие свой вид при переходе в любую другую координатную систему. Таким образом, все соотношения пишутся в форме, годной не только в избранной, но и в любой координатной системе, а значит, эти соотношения отражают геометрические (или физические) факты, независимые от выбора определенной координатной системы; искажающее влияние случайного выбора этой системы устраняется.

Из дальнейшего будет видно, каким образом целый ряд геометрических и физических вопросов поддается именно этой трактовке.

§ 26. Понятие о ковариантном тензоре

Мы рассмотрим сначала *одновалентный ковариантный тензор*. Он появляется наиболее естественным образом в связи с линейной скалярной функцией вектора.

Пусть каждому вектору $\mathbf{x}$ *поставлено в соответствие число* φ

$$\varphi=\varphi(\mathbf{x}) \tag{26.1}$$

таким образом, что для любых двух векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$

$$\varphi(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\varphi(\mathbf{x}_1)+\varphi(\mathbf{x}_2) \tag{26.2}$$

и для любого числа α

$$\varphi(\alpha\mathbf{x})=\alpha\varphi(\mathbf{x}). \tag{26.3}$$

Тогда $\varphi(\mathbf{x})$ *называется линейной функцией вектора* $\mathbf{x}$.

Будем рассматривать $\varphi(\mathbf{x})$ в какой-нибудь координатной системе, т. е. будем задавать аргумент $\mathbf{x}$ его координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и выражать $\varphi(\mathbf{x})$ как функцию этих координат. Так как

$$\mathbf{x}=x^1\mathbf{e}_1+\ldots+x^n\mathbf{e}_n,$$

то, пользуясь свойствами (26.2), (26.3), легко получаем:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n) = x^1\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + x^n\varphi(\mathbf{e}_n).$$

Обозначим для краткости

$$\varphi_i = \varphi(\mathbf{e}_i). \qquad (26.4)$$

Тогда окончательно

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_i x^i, \qquad (26.5)$$

где подразумевается суммирование по индексу i. Итак, линейная функция вектора $\varphi(\mathbf{x})$ выражается через его координаты линейной формой. Запишем зависимость (26.5) в какой-нибудь другой координатной системе:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{i'} x^{i'}. \qquad (26.6)$$

Функция $\varphi(\mathbf{x})$ остается прежней, но так как x^i — координаты вектора-аргумента — примут преобразованные значения $x^{i'}$, то должны преобразоваться и коэффициенты φ_i линейной формы (26.5). Спрашивается, по какому закону происходит это преобразование.

Применим формулу (26.4) в новой координатной системе:

$$\varphi_{i'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'}). \qquad (26.7)$$

Согласно (24.4)

$$\mathbf{e}_{i'} = A^1_{i'}\mathbf{e}_1 + \ldots + A^n_{i'}\mathbf{e}_n = A^i_{i'}\mathbf{e}_i. \qquad (26.8)$$

Пользуясь свойствами (26.2), (26.3), можно переписать (26.7) в виде

$$\varphi_{i'} = \varphi(A^1_{i'}\mathbf{e}_1 + \ldots + A^n_{i'}\mathbf{e}_n) = A^1_{i'}\varphi(\mathbf{e}_1) + \ldots + A^n_{i'}\varphi(\mathbf{e}_n).$$

Вспоминая (26.4), получаем окончательно

$$\varphi_{i'} = A^i_{i'}\varphi_i. \qquad (26.9)$$

Сравнивая (26.9) с (26.8), мы замечаем, что закон преобразования коэффициентов φ_i в точности совпадает с законом преобразования векторов репера $\mathbf{e}_i$.

Итак, когда нам задана линейная функция вектора $\varphi(\mathbf{x})$, то в каждой координатной системе у нас возникает n чисел φ_1, φ_2, ..., φ_n, преобразующихся по тому же закону, что и векторы соответствующего репера. Мы пришли к понятию одновалентного ковариантного тензора.

Мы говорим, что нам дан одновалентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам задано n чисел a_i, занумерованных при помощи одного индекса (пробегающего значения 1, 2, ..., n) и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a_{i'} = A^i_{i'}a_i. \qquad (26.10)$$

Эти числа a_i мы будем называть *координатами тензора* в соответствующей координатной системе.

Термин «ковариантный», т. е. сопреобразующийся, выражает то обстоятельство, что закон преобразования a_i такой же, как и для векторов репера $\mathbf{e}_i$.

Коэффициенты φ_i линейной функции вектора доставляют нам важный пример одновалентного ковариантного тензора a_i, как показывает закон преобразования (26.9). Обратно, легко убедиться, что любой одновалентный ковариантный тензор a_i при желании всегда можно истолковать именно таким образом. В самом деле, *определим* $\varphi(\mathbf{x})$ по формуле $\varphi(\mathbf{x}) = a_i x^i$ в некоторой исходной координатной системе. Очевидно, $\varphi(\mathbf{x})$ будет линейно зависеть от $\mathbf{x}$ и, самое главное, ее коэффициенты φ_i будут совпадать с a_i не только в исходной координатной системе (что имеет место по определению), но и в любой другой тоже, так как φ_i и a_i подчиняются одному и тому же закону преобразования (ср. (26.9), (26.10)).

Пример. *Гиперплоскостью* мы будем называть множество всех точек, координаты которых в какой-нибудь координатной системе удовлетворяют линейному уравнению

$$a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n + a = 0. \tag{26.11}$$

Определение это имеет инвариантный смысл: вследствие линейности закона преобразования для координат x^i уравнение (26.11) остается линейным — конечно, с другими коэффициентами — и в любой другой координатной системе.

Коэффициенты уравнения (26.11) заданы с точностью до умножения на отличное от нуля число. Чтобы уничтожить эту неопределенность, приведем свободный член к -1 (предполагая, что гиперплоскость не проходит через начало O) и запишем уравнение гиперплоскости в виде

$$a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n - 1 = 0,$$

т. е.

$$a_i x^i = 1. \tag{26.12}$$

Будем рассматривать всевозможные координатные системы с фиксированным началом O.

При переходе от одной из них к другой радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ любой точки M не меняется, а следовательно, координаты точки $M(x^1, \ldots, x^n)$ преобразуются как координаты инвариантного вектора по закону (24.16):

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'}.$$

Подставляя это x^i в уравнение (26.12), получим:

$$a_i A^i_{i'} x^{i'} = 1.$$

Мы пришли к уравнению прежней гиперплоскости, но в новых координатах $x^{i'}$. Если записать это уравнение аналогично уравнению (26.12):

$$a_{i'}x^{i'} = 1, \tag{26.13}$$

то коэффициенты $a_{i'}$, очевидно, будут иметь вид

$$a_{i'} = A^i_{i'}a_i. \tag{26.14}$$

Закон преобразования совпадает с (26.10), и следовательно, *коэффициенты уравнения гиперплоскости*

$$a_i x^i = 1$$

ведут себя как одновалентный ковариантный тензор при всех преобразованиях координатных систем с фиксированным началом O.

Рассмотрим теперь двухвалентный ковариантный тензор. К нему лучше всего подойти, рассматривая скалярную билинейную функцию двух векторов. А именно, пусть каждой паре векторов **x**, **y**, заданных в определенном порядке, поставлено в соответствие число

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{26.15}$$

причем функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является линейной по каждому из двух аргументов. Таким образом, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по самому определению не зависит от выбора координатной системы. Выразим теперь φ через координаты векторов **x**, **y** в какой-нибудь координатной системе. Так как

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j,$$

то, пользуясь билинейным характером функции φ, получаем:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(x^i\mathbf{e}_i, y^j\mathbf{e}_j) = x^i y^j \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \tag{26.16}$$

В этой записи, конечно, подразумевается двойное суммирование по i и j. Обозначая для краткости

$$\varphi_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \tag{26.17}$$

получаем окончательно

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij}x^i y^j. \tag{26.18}$$

Таким образом, билинейная функция двух векторов выражается билинейной формой их координат. Коэффициенты φ_{ij} этой билинейной формы зависят от выбора координатной системы и преобразуются по закону, который нетрудно установить. А именно, в новой координатной системе аналогично (26.17)

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}),$$

а так как

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{j'} = A^j_{j'}\mathbf{e}_j,$$

то

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(A^i_{i'}\mathbf{e}_i, A^j_{j'}\mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}\varphi_{ij}. \tag{26.19}$$

Закон преобразования коэффициентов φ_{ij}, который мы таким образом установили, как бы повторяет формулу (26.9) для каждого из двух индексов.

Формулируем теперь общее определение двухвалентного ковариантного тензора, пример которого мы только что получили, в виде совокупности коэффициентов φ_{ij}.

Мы говорим, что нам дан двухвалентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n^2 чисел a_{ij}, которые занумерованы при помощи двух индексов (пробегающих один независимо от другого значения 1, 2, ..., n) *и преобразуются при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}a_{ij}. \tag{26.20}$$

Числа a_{ij} мы будем называть *координатами* нашего тензора в соответствующей координатной системе. Двухвалентный ковариантный тензор мы будем называть более коротко *дважды ковариантным тензором.*

Дословным повторением предыдущего рассуждения для одновалентного случая мы покажем и здесь, что не только коэффициенты φ_{ij} билинейной функции двух векторов образуют всегда дважды ковариантный тензор, но и обратно, координаты a_{ij} любого такого тензора всегда можно истолковать как коэффициенты φ_{ij} некоторой билинейной функции. Для этого достаточно построить $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *в какой-либо исходной координатной системе* по формуле

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ij}x^i y^j, \tag{26.21}$$

и тогда, поскольку, таким образом, $\varphi_{ij} = a_{ij}$ в одной координатной системе, это равенство будет соблюдаться и в любой другой (в силу одинакового характера законов преобразования (26.19) и (26.20)).

Отметим важный частный случай, когда билинейная функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет симметрической:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \tag{26.22}$$

В координатной записи это означает:

$$\varphi_{ij}x^i y^j = \varphi_{ij}y^i x^j.$$

Меняя обозначения индексов суммирования в правой части, получим:

$$\varphi_{ij}x^i y^j = \varphi_{ji}y^j x^i.$$

Так как это равенство должно соблюдаться тождественно относительно x^i, y^j, то из него следует:

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji}, \tag{26.23}$$

т. е. матрица коэффициентов φ_{ij} является симметрической. Тензор φ_{ij} и вообще тензор a_{ij}, удовлетворяющий условию

$$a_{ij} = a_{ji}, \tag{26.24}$$

называется *симметрическим*. При этом, если это условие удовлетворяется в какой-либо исходной координатной системе, то удовлетворяется и в любой другой, как без труда вытекает из закона преобразования (26.20).

Впрочем это вытекает также и из того, что функция $\varphi(x, y)$, построенная в исходной координатной системе согласно (26.21), будет в нашем случае симметрической, а это ее свойство, как мы видели, влечет за собой в любой координатной системе соотношение $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Пример. Гиперповерхность 2-го порядка, не проходящая через начало O, может быть задана уравнением вида

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_k x^k + 1 = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{26.25}$$

При всевозможных преобразованиях координатных систем с закрепленным началом O коэффициенты уравнения a_{ij} ведут себя как симметрический дважды ковариантный тензор, а a_k — как одноковариантный тензор. Это легко показать тем же путем, как и в случае гиперплоскости.

Теперь ясно, как формулировать определение ковариантного тензора в общем случае.

Мы говорим, что нам дан k-валентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n^k чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, занумерованных при помощи k индексов и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_k}_{i'_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}. \tag{26.26}$$

Индексы при $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ различаются друг от друга 1-м, 2-м, ..., k-м местом записи и пробегают независимо друг от друга значения 1, 2, ..., n.

Числа $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ мы будем называть *координатами* нашего тензора в соответствующей координатной системе. Мы будем называть k-валентный ковариантный тензор также *k раз ковариантным тензором*.

Совершенно так же, как в случае билинейной скалярной функции, можно показать, что всякая полилинейная (линейная относительно всех своих аргументов) скалярная функция $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ с векторами-аргументами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ допускает координатную запись

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k) = \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k}. \qquad (26.27)$$

Здесь $x_1^{i_1}$ — координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}_1$ и т. д. Аналогично предыдущему коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ определяются формулами

$$\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k) \qquad (26.28)$$

и преобразуются по закону (26.26), т. е. образуют k раз ковариантный тензор.

Обратно, координаты всякого k раз ковариантного тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ могут быть при желании истолкованы как коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ некоторой полилинейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ от k векторных аргументов. Все это проверяется совершенно аналогично двухвалентному случаю.

Подчеркнем, что, говоря о функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$, мы, как и в предыдущих случаях, имеем в виду функцию инвариантную, т. е. определенную независимо от выбора координатной системы.

§ 27. Общее понятие о тензоре

Прежде чем формулировать общее понятие о тензоре, мы займемся так называемыми контравариантными тензорами.

Важнейший пример одновалентного контравариантного тензора доставляют нам координаты x^i фиксированного вектора $\mathbf{x}$. Поскольку вектор $\mathbf{x}$ фиксирован, координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ имеют определенные численные значения в каждой координатной систете и преобразуются по закону (24.19):

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i. \qquad (27.1)$$

В общем случае мы будем говорить, что нам дан одновалентный контравариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n чисел $a^1, a^2, \ldots, a^n$, занумерованных при помощи одного индекса и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a^{i'} = A_i^{i'} a^i. \qquad (27.2)$$

Числа a^i мы будем называть *координатами* нашего тензора.