Совершенно так же, как в случае билинейной скалярной функции, можно показать, что всякая полилинейная (линейная относительно всех своих аргументов) скалярная функция $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ с векторами-аргументами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ допускает координатную запись

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k) = \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k}. \tag{26.27}$$

Здесь $x_1^{i_1}$ — координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}_1$ и т. д. Аналогично предыдущему коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ определяются формулами

$$\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k) \tag{26.28}$$

и преобразуются по закону (26.26), т. е. образуют k раз ковариантный тензор.

Обратно, координаты всякого k раз ковариантного тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ могут быть при желании истолкованы как коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ некоторой полилинейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$ от k векторных аргументов. Все это проверяется совершенно аналогично двухвалентному случаю.

Подчеркнем, что, говоря о функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k)$, мы, как и в предыдущих случаях, имеем в виду функцию инвариантную, т. е. определенную независимо от выбора координатной системы.

§ 27. Общее понятие о тензоре

Прежде чем формулировать общее понятие о тензоре, мы займемся так называемыми контравариантными тензорами.

Важнейший пример одновалентного контравариантного тензора доставляют нам координаты x^i фиксированного вектора $\mathbf{x}$. Поскольку вектор $\mathbf{x}$ фиксирован, координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ имеют определенные численные значения в каждой координатной системе и преобразуются по закону (24.19):

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i. \tag{27.1}$$

В общем случае мы будем говорить, что нам дан одновалентный контравариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n чисел $a^1, a^2, \ldots, a^n$, занумерованных при помощи одного индекса и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону

$$a^{i'} = A_i^{i'} a^i. \tag{27.2}$$

Числа a^i мы будем называть *координатами* нашего тензора.

В обозначении контравариантные тензоры отличаются от ковариантных записью индексов наверху. Этим соглашением мы фактически пользовались и ранее (хотя смысл его раскрывается лишь теперь) и систематически будем пользоваться в дальнейшем. Термин «контравариантный», т. е. «противопреобразующийся», напоминает о том, что координаты контравариантного тензора $a^1, a^2, \ldots, a^n$ преобразуются не так, как векторы репера $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, а при помощи (транспонированной) обратной матрицы (о чем подробно говорилось в § 24 в применении к координатам вектора $x^1, x^2, \ldots, x^n$).

Как уже отмечалось, координаты x^i любого фиксированного вектора $\mathbf{x}$ образуют одновалентный контравариантный тензор. Но верно и обратное: координаты любого одновалентного контравариантного тензора a^i можно истолковать как координаты x^i некоторого фиксированного вектора $\mathbf{x}$.

В самом деле, построим в какой-нибудь исходной координатной системе вектор $\mathbf{x}$ с координатами $x^i = a^i$. Тогда это равенство продолжает соблюдаться и в любой координатной системе ввиду одинакового характера законов преобразования (27.1) и (27.2).

Ясно, что определение k раз контравариантного тензора $a^{i_1 i_2 \ldots i_k}$ может быть теперь без труда формулировано аналогично определению k раз ковариантного тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ единственно с той разницей, что закон преобразования вместо (26.26) будет иметь вид

$$a^{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{i'_1}_{i_1} A^{i'_2}_{i_2} \ldots A^{i'_k}_{i_k} a^{i_1 i_2 \ldots i_k}, \qquad (27.3)$$

повторяя, таким образом, для каждого из индексов закон (27.1).

Мы, однако, не будем останавливаться на этом более подробно, так как общее определение тензора, обладающего и ковариантными и контравариантными индексами в любом числе, покрывает все до сих пор перечисленные частные случаи.

Начнем с примера, в дальнейшем весьма важного.

Мы будем называть аффинором $\mathfrak{A}$ *закон, ставящий в соответствие каждому вектору* $\mathbf{x}$ *нашего пространства определенный вектор* $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \qquad (27.4)$$

причем зависимость $\mathbf{y}$ *от* $\mathbf{x}$ *носит линейный характер, т. е. соблюдаются условия:*

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathfrak{A}\mathbf{x}_1 + \mathfrak{A}\mathbf{x}_2, \qquad (27.5)$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathfrak{A}\mathbf{x} \qquad (27.6)$$

для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}, \alpha$ *(*α*—число).*

Рассмотрим аффинор $\mathfrak{A}$ в координатной записи, т. е. выразим координаты y^j вектора $\mathbf{y}$ как функции координат x^i вектора $\mathbf{x}$ в какой-нибудь координатной системе. Для этой цели разложим предварительно векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_i$ (т. е. результат действия нашего аффинора на векторы репера) по векторам репера. Коэффициенты разложения обозначим a_i^j:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = a_i^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_i^n\mathbf{e}_n = a_i^j\mathbf{e}_j. \tag{27.7}$$

Тогда, учитывая, что, как обычно,

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i,$$

и пользуясь свойством линейности аффинора $\mathfrak{A}$, мы можем написать:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A}(x^i\mathbf{e}_i) = x^i\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = x^i a_i^j\mathbf{e}_j.$$

Так как, с другой стороны,

$$\mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j,$$

то, сравнивая оба разложения, получим:

$$y^j = a_i^j x^i. \tag{27.8}$$

Таким образом, координаты вектора-функции $\mathbf{y}$ выражаются линейно через координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}$ с коэффициентами a_i^j.

Эти коэффициенты a_i^j мы будем называть *координатами аффинора* $\mathfrak{A}$. Выясним теперь закон их преобразования.

Запишем (27.7) в новой системе координат:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_{i'} = a_{i'}^{j'}\mathbf{e}_{j'}. \tag{27.9}$$

Пользуясь формулами

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_j = A_j^{j'}\mathbf{e}_{j'},$$

а также формулами (27.7), мы можем, с другой стороны, написать:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_{i'} = \mathfrak{A}(A_{i'}^i\mathbf{e}_i) = A_{i'}^i\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = A_{i'}^i a_i^j\mathbf{e}_j = A_{i'}^i a_i^j A_j^{j'}\mathbf{e}_{j'}.$$

Сравнивая это разложение с разложением (27.9), мы можем приравнять коэффициенты при одинаковых векторах нового репера. Получаем:

$$a_{i'}^{j'} = A_{i'}^i A_j^{j'} a_i^j. \tag{27.10}$$

Это и есть искомый закон преобразования координат аффинора.

Мы видим, что нижний индекс участвует в преобразовании по схеме (26.10), т. е. как ковариантный, а верхний индекс — по схеме

(27.1), т. е. как контравариантный. В связи с этим совокупность координат аффинора a_i^j, заданную в каждой координатной системе, мы будем называть *тензором один раз ковариантным и один раз контравариантным*. Как мы видим, закон преобразования для координат аффинора a_i^j существенно отличается от закона преобразования коэффициентов билинейной функции a_{ij}, хотя в обоих случаях мы имеем двухвалентный (т. е. с двумя индексами) тензор.

Заметим, что мало того, что координаты аффинора подчинены закону преобразования (27.10), но и, обратно, величины a_i^j, подчиненные этому закону, всегда представляют собой координаты некоторого аффинора $\mathfrak{A}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно определить $\mathfrak{A}$ формулами (27.8) в какой-нибудь одной исходной координатной системе. Тогда величины a_i^j продолжают служить координатами аффинора и в любой другой координатной системе, так как преобразуются по тому же закону (27.10), как и координаты аффинора.

Отметим еще важный частный случай, когда аффинор означает тождественное преобразование, т. е. когда

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} \equiv \mathbf{x},$$

а следовательно, $y^j = x^j$.

Сравнивая эти формулы с (27.8), мы замечаем, что в нашем случае в *любой координатной системе*

$$a_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}. \qquad (27.11)$$

Таким образом, мы получаем пример тензора один раз ковариантного и один раз контравариантного, имеющего в *любой координатной системе одни и те же координаты* δ_i^j. Этот тензор мы будем называть *единичным*. То, что числа δ_i^j действительно подчиняются закону преобразования (27.10), оставаясь в то же время неизменными, легко проверить и непосредственно. В самом деле, вычисляя правую часть (27.10), получим:

$$A_{i'}^i A_j^{j'} \delta_i^j = A_{i'}^k A_k^{j'} = \delta_{i'}^{j'}.$$

Мы сначала применили соотношение (27.11) и сохранили в сумме лишь члены, где $i = j$ (обозначив их общее значение через k), а затем использовали (24.10).

Дадим, наконец, общее определение тензора.

Мы говорим, что нам дан $k + l$-валентный тензор, k раз ковариантный и l раз контравариантный, если в каждой координатной *системе нам заданы* n^{k+l} чисел $a^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, *занумерованных* k *индексами внизу и* l *индексами наверху и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a^{j'_1 j'_2 \ldots j'_l}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} A^{j'_2}_{j_2} \ldots A^{j'_l}_{j_l} A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_k}_{i'_k} a^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}. \quad (27.12)$$

Индексы внизу отличаются друг от друга 1-м, 2-м, ..., k-м местом написания; аналогично отличаются друг от друга и верхние индексы. Все индексы пробегают значения 1, 2, ..., n независимо друг от друга. Числа $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ мы будем называть *координатами тензора* в соответствующей координатной системе.

Смысл закона преобразования (27.12) состоит, очевидно, в том, что каждый нижний индекс участвует в преобразовании один раз по схеме ковариантного тензора

$$a_{i'} = A^{i}_{i'} a_i,$$

а каждый верхний — один раз по схеме контравариантного тензора

$$a^{j'} = A^{j'}_{j} a^j.$$

Общее число индексов $k+l$ будем называть *валентностью* тензора.

Числу нижних индексов k и числу верхних индексов l можно придавать любые значения 0, 1, 2, ..., одному независимо от другого. Если $k=l=0$, то, как мы будем считать, тензор имеет лишь одну координату a, совсем лишенную индексов, и сводится к *инварианту*, т. е. координата a имеет одно и то же численное значение в любой координатной системе. Кстати, в случае $k=l=0$ имеем $n^{k+l}=1$. Особое внимание следует обратить на то обстоятельство, что в правой части (27.12) происходит суммирование по всем $k+l$ нештрихованным индексам, и, таким образом, *каждая* координата тензора в новой координатной системе зависит от *всех* его координат в старой системе. Это означает, что в конечном счете тензор не сводится просто к совокупности отдельных чисел — его координат, — а представляет собой единое целое.

Последнее связано с тем, что каждый тензор, как мы видели на примерах, отражает какой-либо цельный геометрический или физический объект и «распадается» на свои координаты лишь условно, т. е. по отношению к той или иной координатной системе.

§ 28. Сложение тензоров

В ближайших параграфах мы займемся тензорной алгеброй, т. е. рассмотрим основные инвариантные операции, позволяющие по тензорам составлять новые тензоры. Этих операций четыре: сложение, умножение, свертывание тензоров и подстановка индексов у тензора.