системе нам заданы n^{k+l} чисел $a^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, *занумерованных* k *индексами внизу и* l *индексами наверху и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a^{j'_1 j'_2 \ldots j'_l}_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} A^{j'_2}_{j_2} \ldots A^{j'_l}_{j_l} A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ldots A^{i_k}_{i'_k} a^{j_1 j_2 \ldots j_l}_{i_1 i_2 \ldots i_k}. \quad (27.12)$$

Индексы внизу отличаются друг от друга 1-м, 2-м, ..., k-м местом написания; аналогично отличаются друг от друга и верхние индексы. Все индексы пробегают значения 1, 2, ..., n независимо друг от друга. Числа $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ мы будем называть *координатами тензора* в соответствующей координатной системе.

Смысл закона преобразования (27.12) состоит, очевидно, в том, что каждый нижний индекс участвует в преобразовании один раз по схеме ковариантного тензора

$$a_{i'} = A^i_{i'} a_i,$$

а каждый верхний — один раз по схеме контравариантного тензора

$$a^{j'} = A^{j'}_j a^j.$$

Общее число индексов $k+l$ будем называть *валентностью* тензора.

Числу нижних индексов k и числу верхних индексов l можно придавать любые значения 0, 1, 2, ..., одному независимо от другого. Если $k=l=0$, то, как мы будем считать, тензор имеет лишь одну координату a, совсем лишенную индексов, и сводится к *инварианту*, т. е. координата a имеет одно и то же численное значение в любой координатной системе. Кстати, в случае $k=l=0$ имеем $n^{k+l}=1$. Особое внимание следует обратить на то обстоятельство, что в правой части (27.12) происходит суммирование по всем $k+l$ нештрихованным индексам, и, таким образом, *каждая* координата тензора в новой координатной системе зависит от *всех* его координат в старой системе. Это означает, что в конечном счете тензор не сводится просто к совокупности отдельных чисел — его координат, — а представляет собой единое целое.

Последнее связано с тем, что каждый тензор, как мы видели на примерах, отражает какой-либо цельный геометрический или физический объект и «распадается» на свои координаты лишь условно, т. е. по отношению к той или иной координатной системе.

§ 28. Сложение тензоров

В ближайших параграфах мы займемся тензорной алгеброй, т. е. рассмотрим основные инвариантные операции, позволяющие по тензорам составлять новые тензоры. Этих операций четыре: сложение, умножение, свертывание тензоров и подстановка индексов у тензора.

Инвариантность тензорных операций нужно понимать в том смысле, что, примененные к данным тензорам, они дают в результате вполне определенный тензор, *не зависящий от того, в какой координатной системе происходит выкладка.* Тем самым тензорные операции отражают по существу те операции над геометрическими и физическими объектами (заданными посредством тензоров), которые имеют геометрический или физический смысл и совершаются независимо от выбора координатной системы.

В этом параграфе мы рассмотрим сложение тензоров. Пусть нам даны два тензора *одинакового строения, т. е. с одинаковым числом верхних индексов и с одинаковым числом нижних индексов*. Пусть, для примера, эти тензоры будут трижды ковариантными и дважды контравариантными:

$$a^{ij}_{pqr}, \qquad b^{ij}_{pqr}.$$

В каждой координатной системе каждую координату первого тензора сложим с соответствующей (т. е. занумерованной теми же индексами на тех же местах) координатой второго тензора, и результат примем за координату нового тензора

$$c^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{pqr} + b^{ij}_{pqr}. \tag{28.1}$$

Координату нового тензора нумеруем, конечно, теми же индексами на тех же местах.

Однако нужно еще проверить, что c^{ij}_{pqr} действительно представляют собой координаты одного и того же тензора, независимо от того, в какой координатной системе мы их вычислили. Другими словами, нужно убедиться, что c^{ij}_{pqr} подчиняются тензорному закону преобразования:

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'}\, c^{ij}_{pqr}. \tag{28.2}$$

Здесь

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = a^{i'j'}_{p'q'r'} + b^{i'j'}_{p'q'r'}, \tag{28.3}$$

т. е. $c^{i'j'}_{p'q'r'}$ вычисляются в новой (как и вообще в любой) координатной системе по схеме (28.1).

Но равенство (28.2) легко вытекает из справедливости тензорного закона преобразования для a^{ij}_{pqr}, b^{ij}_{pqr}:

$$a^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} a^{ij}_{pqr}, \tag{28.4}$$

$$b^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} b^{ij}_{pqr}. \tag{28.5}$$

Действительно, складывая эти равенства почленно, вынося общие множители в правой части за скобки и принимая во внимание (28.1) и (28.3), мы сейчас же получаем равенство (28.2).

Очевидно, в нашем рассуждении ничего по существу не изменится, если мы будем складывать *любые* тензоры, но обязательно *одинакового строения*. В результате получается вполне определенный тензор *того же строения*. Ясно также, что если вместо двух тензоров складывать несколько тензоров одинакового строения, то все сказанное остается справедливым.

Поясним еще инвариантный характер операции сложения на примере. Допустим, что складываются два одновалентных контравариантных тензора x^i, y^i, в результате чего получается тензор того же строения z^i:

$$z^i = x^i + y^i. \tag{28.6}$$

Инвариантный характер операции сложения означает, что z^i дают нам координаты вполне определенного тензора, независимо от того, в какой координатной системе они вычислены.

Истолкуем теперь x^i, y^i как координаты фиксированных векторов, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, что, как мы знаем, всегда возможно. Поскольку z^i — координаты вполне определенного тензора, то и их можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора $\mathbf{z}$. Тогда равенство (28.6) выражает геометрический факт, независимый от выбора координатной системы, именно, что вектор $\mathbf{z}$ есть сумма векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Аналогичным образом и в более сложных случаях инвариантность тензорных операций означает по существу рассмотрение геометрических и физических фактов вне зависимости от случайностей выбора координатной системы.

§ 29. Умножение тензоров

В отличие от сложения перемножать можно любые тензоры (не требуя, чтобы они были одинакового строения), но при этом обязательно указывать порядок множителей, так как результат будет зависеть не только от самих множителей, но и от их порядка.

Рассмотрим для примера перемножение тензоров a^i_{pq}, b^j_r, заданных в порядке их записи.

В каждой координатной системе каждую координату первого тензора множим на каждую координату второго тензора и полученные произведения $a^i_{pq}b^j_r$ принимаем за координаты нового тензора c^{ij}_{pqr}, причем нумеруем эти координаты так: внизу выписываем сначала нижние индексы первого множителя, а затем нижние индексы второго множителя, сохраняя в обоих случаях их прежний порядок, и аналогично поступаем с верхними индексами.

Полученный тензор c^{ij}_{pqr} мы будем называть *произведением* тензоров a^i_{pq}, b^j_r.