Очевидно, в нашем рассуждении ничего по существу не изменится, если мы будем складывать *любые* тензоры, но обязательно *одинакового строения*. В результате получается вполне определенный тензор *того же строения*. Ясно также, что если вместо двух тензоров складывать несколько тензоров одинакового строения, то все сказанное остается справедливым.

Поясним еще инвариантный характер операции сложения на примере. Допустим, что складываются два одновалентных контравариантных тензора x^i, y^i, в результате чего получается тензор того же строения z^i:

$$z^i = x^i + y^i. \tag{28.6}$$

Инвариантный характер операции сложения означает, что z^i дают нам координаты вполне определенного тензора, независимо от того, в какой координатной системе они вычислены.

Истолкуем теперь x^i, y^i как координаты фиксированных векторов, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, что, как мы знаем, всегда возможно. Поскольку z^i — координаты вполне определенного тензора, то и их можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора $\mathbf{z}$. Тогда равенство (28.6) выражает геометрический факт, независимый от выбора координатной системы, именно, что вектор $\mathbf{z}$ есть сумма векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Аналогичным образом и в более сложных случаях инвариантность тензорных операций означает по существу рассмотрение геометрических и физических фактов вне зависимости от случайностей выбора координатной системы.

§ 29. Умножение тензоров

В отличие от сложения перемножать можно любые тензоры (не требуя, чтобы они были одинакового строения), но при этом обязательно указывать порядок множителей, так как результат будет зависеть не только от самих множителей, но и от их порядка.

Рассмотрим для примера перемножение тензоров a^i_{pq}, b^j_r, заданных в порядке их записи.

В каждой координатной системе каждую координату первого тензора множим на каждую координату второго тензора и полученные произведения $a^i_{pq}b^j_r$ принимаем за координаты нового тензора c^{ij}_{pqr}, причем нумеруем эти координаты так: внизу выписываем сначала нижние индексы первого множителя, а затем нижние индексы второго множителя, сохраняя в обоих случаях их прежний порядок, и аналогично поступаем с верхними индексами.

Полученный тензор c^{ij}_{pqr} мы будем называть *произведением* тензоров a^i_{pq}, b^j_r.

Если бы множителей было несколько, то мы совершенно таким же образом перенесли бы поочередно индексы 1-го, 2-го, ... и т. д. множителей на координату произведения.

Однако мы должны еще, конечно, доказать, что определенные в каждой координатной системе числа

$$c^{ij}_{pqr} = a^i_{pq} b^j_r \tag{29.1}$$

действительно являются координатами тензора. С этой целью выпишем закон преобразования для координат множителей:

$$a^{i'}_{p'q'} = A^{i'}_i A^p_{p'} A^q_{q'} a^i_{pq},$$
$$b^{j'}_{r'} = A^{j'}_j A^r_{r'} b^j_r.$$

Перемножая эти равенства почленно и принимая во внимание, что в новой (как и во всякой) координатной системе имеет место равенство (29.1), так что

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = a^{i'}_{p'q'} b^{j'}_{r'},$$

получим окончательно

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_i A^{j'}_j A^p_{p'} A^q_{q'} A^r_{r'} c^{ij}_{pqr}. \tag{29.2}$$

Этот результат показывает нам, что в какой бы координатной системе мы ни вычисляли величины c^{ij}_{pqr} согласно (29.1), они являются всегда координатами *одного и того же тензора*. Таким образом, операция умножения тензоров действительно определяет некоторый новый тензор.

Очевидно, все сказанное дословно повторяется и при перемножении любых тензоров в любом числе.

Заметим, что если мы станем перемножать те же тензоры в другом порядке, то получим другой результат. А именно, хотя координаты произведения будут, конечно, те же, но они будут иначе занумерованы индексами. Так, при изменении порядка множителей в нашем примере получаем:

$$\tilde{c}^{ij}_{pqr} = b^i_p a^j_{qr}. \tag{29.3}$$

Сравнивая это выражение с (29.1), убеждаемся, что *соответствующие* (т. е. занумерованные одинаковыми индексами на одинаковых местах) координаты тензоров c^{ij}_{pqr} и $\tilde{c}^{ij}_{pqr}$ не совпадают, хотя *совокупность* координат у этих тензоров одна и та же. Так как в понятие тензора входит и способ нумерации его координат при помощи индексов, то мы должны признать полученные тензоры различными. Более подробно см. об этом в § 31.

Отметим простой частный случай, когда из двух перемножаемых тензоров один — нулевой валентности, т. е. попросту инвариант a.

Тогда дело сводится к умножению всех координат другого множителя, например b_p^{ij}, на этот инвариант, в результате чего получается тензор того же строения:

$$c_p^{ij} = ab_p^{ij}.$$

Между прочим, в связи с этим мы не рассматриваем особо операцию вычитания тензоров (одного строения), поскольку ее всегда можно представить как сложение уменьшаемого с вычитаемым, умноженным на -1.

Пример. Перемножением одновалентных тензоров b^i и c_j получается двухвалентный тензор

$$a_j^i = b^i c_j. \tag{29.4}$$

Тензор a_j^i, как мы знаем (§ 27), всегда может быть истолкован как некоторый аффинор $\mathfrak{A}$:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \text{ т. е. } y^i = a_j^i x^j.$$

Как отзывается на аффиноре $\mathfrak{A}$ то обстоятельство, что соответствующий тензор a_j^i *мультипликативный* (т. е. получен произведением одновалентных тензоров)?

Пользуясь тем, что $a_j^i = b^i c_j$, перепишем:

$$y^i = b^i c_j x^j.$$

Мы знаем (§ 26), что $c_j x^j$ можно всегда истолковать как некоторую линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x}$, так что

$$y^i = b^i \varphi(\mathbf{x}).$$

А так как b^i всегда можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора $\mathbf{b}$, то окончательно

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}\varphi(\mathbf{x}).$$

Таким образом, в нашем случае действие аффинора на вектор-аргумент $\mathbf{x}$ дает произведение постоянного вектора $\mathbf{b}$ на линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$. Аффинор $\mathfrak{A}$ в этом случае называют иногда *диадой*.

§ 30. Свертывание тензора

Операции сложения и умножения тензоров естественно переносят в тензорную область привычные нам арифметические операции. В противоположность этому операция свертывания носит специфически тензорный характер и не имеет прообраза в более элементарных разделах математики.