Тогда дело сводится к умножению всех координат другого множителя, например b_p^{ij}, на этот инвариант, в результате чего получается тензор того же строения:

$$c_p^{ij} = ab_p^{ij}.$$

Между прочим, в связи с этим мы не рассматриваем особо операцию вычитания тензоров (одного строения), поскольку ее всегда можно представить как сложение уменьшаемого с вычитаемым, умноженным на -1.

Пример. Перемножением одновалентных тензоров b^i и c_j получается двухвалентный тензор

$$a_j^i = b^i c_j. \tag{29.4}$$

Тензор a_j^i, как мы знаем (§ 27), всегда может быть истолкован как некоторый аффинор $\mathfrak{A}$:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \text{ т. е. } y^i = a_j^i x^j.$$

Как отзывается на аффиноре $\mathfrak{A}$ то обстоятельство, что соответствующий тензор a_j^i *мультипликативный* (т. е. получен произведением одновалентных тензоров)?

Пользуясь тем, что $a_j^i = b^i c_j$, перепишем:

$$y^i = b^i c_j x^j.$$

Мы знаем (§ 26), что $c_j x^j$ можно всегда истолковать как некоторую линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x}$, так что

$$y^i = b^i \varphi(\mathbf{x}).$$

А так как b^i всегда можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора $\mathbf{b}$, то окончательно

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}\varphi(\mathbf{x}).$$

Таким образом, в нашем случае действие аффинора на вектор-аргумент $\mathbf{x}$ дает произведение постоянного вектора $\mathbf{b}$ на линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$. Аффинор $\mathfrak{A}$ в этом случае называют иногда *диадой*.

§ 30. Свертывание тензора

Операции сложения и умножения тензоров естественно переносят в тензорную область привычные нам арифметические операции. В противоположность этому операция свертывания носит специфически тензорный характер и не имеет прообраза в более элементарных разделах математики.

Пусть дан тензор произвольный, но имеющий, по крайней мере, один индекс внизу и, по крайней мере, один индекс наверху, например, a_{pq}^{ijk}. Выберем какой-нибудь индекс наверху, например, 2-й, и какой-нибудь индекс внизу, например, 1-й. Отберем те координаты тензора, для которых два выбранных индекса имеют одинаковые значения 1, 2, ..., n, и просуммируем все эти координаты при фиксированных значениях остальных индексов:

$$a_{1q}^{i1k}+a_{2q}^{i2k}+\ldots+a_{nq}^{ink}=a_q^{ik}. \tag{30.1}$$

Мы обозначили сумму a_q^{ik}, так как она зависит лишь от остальных (фиксированных) индексов. Пользуясь краткой записью суммирования, можно (30.1) переписать:

$$a_{xq}^{ixk}=a_q^{ik}. \tag{30.2}$$

Как оказывается, числа a_q^{ik}, определенные согласно (30.2) в каждой координатной системе, являются координатами одного и того же тензора, утерявшего по сравнению с исходным тензором по одному индексу вверху и внизу.

В самом деле, запишем закон преобразования координат исходного тензора:

$$a_{p'q'}^{i'j'k'}=A_i^{i'}A_j^{j'}A_k^{k'}A_{p'}^{p}A_{q'}^{q}a_{pq}^{ijk}.$$

Придадим второму индексу наверху (j') и первому внизу (p') одно и то же значение x' и по x' произведем суммирование. Получим:

$$a_{x'q'}^{i'x'k'}=A_i^{i'}A_j^{x'}A_k^{k'}A_{x'}^{p}A_{q'}^{q}a_{pq}^{ijk}.$$

В правой части происходит суммирование по шести индексам. Мы выполним сначала суммирование по x'. В силу (24.11)

$$A_j^{x'}A_{x'}^{p}=\delta_j^p,$$

и мы получаем:

$$a_{x'q'}^{i'x'k'}=A_i^{i'}A_k^{k'}A_{q'}^{q}\delta_j^p a_{pq}^{ijk}.$$

Так как $\delta_j^p=\begin{cases}0\\1\end{cases}$, то в сумме следует оставить лишь те члены, для которых $p=j$ (общее значение $p=j$ обозначим через x), причем $\delta_x^x=1$ (здесь по x суммирования не предполагается), так что множитель δ_x^x можно не писать. Получим окончательно:

$$a_{x'q'}^{i'x'k'}=A_i^{i'}A_k^{k'}A_{q'}^{q}a_{xq}^{ixk}. \tag{30.3}$$

Заметим, что во всех случаях, когда в выражение входит множитель δ_i^p, причем по обоим индексам происходит суммирование, этот множитель, как мы видели, следует выкинуть, а в оставшемся выражении индексам p и j придать общее значение (и по нему суммировать). Это правило нам пригодится в дальнейших выкладках.

Пользуясь обозначениями (30.2), мы можем переписать последний результат в виде

$$a_{q'}^{i'k'} = A_i^{i'} A_k^{k'} A_{q'}^{q} a_q^{ik}. \tag{30.4}$$

Эта формула показывает, что величины a_q^{ik} действительно подчиняются тензорному закону преобразования и, следовательно, дают нам вполне определенный тензор.

Мы будем говорить, что тензор a_q^{ik}, составленный из тензора a_{pq}^{ijk} согласно (30.2), *получен из него свертыванием по индексам j и p, или, точнее, по индексам второму сверху и первому снизу.*

В то время как сложение дает нам тензор той же валентности, как и слагаемые, умножение дает тензор, вообще говоря, высшей валентности, чем множители, свертывание приводит, наоборот, к снижению валентности на 2 единицы: пропадает один индекс вверху и один индекс внизу. В связи с этим свертывание является важным источником получения инвариантов: повторяя его достаточное число раз, мы можем уничтожить все индексы у тензора, если у того сначала было одинаковое число индексов внизу и вверху. Полученный в итоге тензор нулевой валентности представляет собой, как мы знаем, инвариант.

Например, тензор a_j^i, отвечающий, как всегда можно считать, некоторому аффинору $\mathfrak{A}$, порождает посредством свертывания инвариант

$$a = a_i^i = a_1^1 + a_2^2 + \ldots + a_n^n, \tag{30.5}$$

который называется *следом* аффинора $\mathfrak{A}$.

Особенно часто применяется свертывание к тензорам, полученным перемножением данных тензоров. Например, запись линейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x})$ (§ 26)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_i x^i \tag{30.6}$$

мы можем теперь истолковать как получение инварианта $\varphi(\mathbf{x})$ путем свертывания тензора $\varphi_i x^p$ (представляющего собой произведение тензоров φ_i и x^p).

Совершенно аналогично этому и запись билинейной скалярной функции

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij} x^i y^j$$

нужно понимать как результат двукратного свертывания тензора $\varphi_{ij} x^p y^q$ по индексам i, p и j, q.

В подобных случаях мы для краткости будем говорить, что «тензор φ_{ij} свертывается с тензорами x^i, y^j», вместо того, чтобы говорить: «тензор φ_{ij} перемножается с тензорами x^p, y^q и в полученном результате производится свертывание по индексам i, p и j, q».

После введения операции свертывания раскрывается полностью и смысл нашего сокращенного обозначения суммирования по индексу, встречающемуся один раз наверху и один раз внизу. Это обозначение именно потому и имеет право на существование, что оно выражает важную и часто встречающуюся операцию свертывания. И действительно, во всех случаях, когда мы его применяли, оно имело именно этот смысл, хотя операция свертывания и была нам неизвестна. Исключительно этот смысл оно будет иметь и в дальнейшем.

§ 31. Операция подстановки индексов

Пусть нам дан какой-либо тензор, например, a^{ij}_{pqr}. Мы можем составить из него новый тензор того же строения b^{ij}_{pqr}, не меняя его координат самих по себе, а лишь иначе нумеруя их посредством индексов. Условимся каждую координату нумеровать теперь так, чтобы прежний первый индекс снизу стал писаться на втором месте, второй — на третьем, а третий — на первом. Формулой это можно выразить так:

$$b^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{qrp}. \tag{31.1}$$

Так как в определение тензора входит и способ нумерации его координат посредством 1-го, 2-го, ... и т. д. индексов внизу, и то же самое наверху, то b^{ij}_{pqr} мы должны признать за тензор, отличный от a^{ij}_{pqr}.

Мы будем говорить, что тензор b^{ij}_{pqr} получен из a^{ij}_{pqr} подстановкой его индексов (в данном случае круговой подстановкой трех нижних индексов при неизменных верхних).

В общем случае можно задаться любой подстановкой нижних индексов и одновременно любой подстановкой верхних индексов (причем, как и в нашем примере, имеются в виду подстановки не численных значений индексов, а *мест их написания* при координате тензора). То, что в результате снова получается тензор и притом того же строения, легко следует из одинакового поведения всех нижних индексов при тензорном законе преобразования и равным образом из одинакового поведения всех верхних индексов.

Но, разумеется, подстановки, при которых верхние индексы могли бы переходить в нижние и наоборот, не рассматриваются, так как они не являются инвариантными операциями. Ввиду различного поведения верхних и нижних индексов при преобразовании координатной системы мы при такой подстановке не получили бы вновь тензора.