говорить: «тензор φ_{ij} перемножается с тензорами x^p, y^q и в полученном результате производится свертывание по индексам i, p и j, q».

После введения операции свертывания раскрывается полностью и смысл нашего сокращенного обозначения суммирования по индексу, встречающемуся один раз наверху и один раз внизу. Это обозначение именно потому и имеет право на существование, что оно выражает важную и часто встречающуюся операцию свертывания. И действительно, во всех случаях, когда мы его применяли, оно имело именно этот смысл, хотя операция свертывания и была нам неизвестна. Исключительно этот смысл оно будет иметь и в дальнейшем.

§ 31. Операция подстановки индексов

Пусть нам дан какой-либо тензор, например, a^{ij}_{pqr}. Мы можем составить из него новый тензор того же строения b^{ij}_{pqr}, не меняя его координат самих по себе, а лишь иначе нумеруя их посредством индексов. Условимся каждую координату нумеровать теперь так, чтобы прежний первый индекс снизу стал писаться на втором месте, второй — на третьем, а третий — на первом. Формулой это можно выразить так:

$$b^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{qrp}. \tag{31.1}$$

Так как в определение тензора входит и способ нумерации его координат посредством 1-го, 2-го, ... и т. д. индексов внизу, и то же самое наверху, то b^{ij}_{pqr} мы должны признать за тензор, отличный от a^{ij}_{pqr}.

Мы будем говорить, что тензор b^{ij}_{pqr} получен из a^{ij}_{pqr} подстановкой его индексов (в данном случае круговой подстановкой трех нижних индексов при неизменных верхних).

В общем случае можно задаться любой подстановкой нижних индексов и одновременно любой подстановкой верхних индексов (причем, как и в нашем примере, имеются в виду подстановки не численных значений индексов, а *мест их написания* при координате тензора). То, что в результате снова получается тензор и притом того же строения, легко следует из одинакового поведения всех нижних индексов при тензорном законе преобразования и равным образом из одинакового поведения всех верхних индексов.

Но, разумеется, подстановки, при которых верхние индексы могли бы переходить в нижние и наоборот, не рассматриваются, так как они не являются инвариантными операциями. Ввиду различного поведения верхних и нижних индексов при преобразовании координатной системы мы при такой подстановке не получили бы вновь тензора.

Операция подстановки индексов производит впечатление формальной и мало содержательной и действительно является такой, если ее рассматривать изолированно. Но основное ее значение сказывается в тех операциях, где она комбинируется со сложением и вычитанием, особенно в операциях *симметрирования и альтернации.*

Операция *симметрирования* производится следующим образом. Из одноименных (например, нижних) индексов данного тензора произвольно выбирается некоторое их число N, над этими индексами производятся $N!$ *всевозможных* подстановок и берется среднее арифметическое всех полученных при этом $N!$ тензоров. Результат симметрирования обозначается тем, что участвующие в симметрировании индексы берутся в круглые скобочки.

В случае $N=1$ симметрирование тривиально и не меняет тензора; подстановка только одна — тождественная.

В случае $N=2$ рассмотрим тензор a_{ij}, где явно выписаны лишь индексы, участвующие в симметрировании; остальные индексы, которых может быть сколько угодно (а может и совсем не быть), лишь подразумеваются. Подстановок здесь будет лишь две: тождественная и транспозиция 1-го и 2-го индексов. Результат симметрирования:

$$a_{(ij)}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}). \tag{31.2}$$

В случае $N=3$ рассмотрим тензор a_{ijk} с той же оговоркой, что он может иметь и другие индексы, хотя симметрированию подлежат лишь явно выписанные. Делая все шесть подстановок и беря среднее арифметическое, получим:

$$a_{(ijk)}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}+a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}). \tag{31.3}$$

Аналогично производим симметрирование и при любом числе симметрируемых индексов. Для верхних индексов все происходит, разумеется, точно таким же образом.

Мы называем тензор *симметрическим* по нескольким данным (обязательно одноименным) индексам, если он не меняется при транспозиции любых двух из этих индексов, а следовательно, и при любой их подстановке. Таков, например, дважды ковариантный тензор, координаты которого образуют симметрическую матрицу

$$a_{ij}=a_{ji}. \tag{31.4}$$

В результате симметрирования получается, очевидно, тензор *симметрический* по тем индексам, которые участвовали в симметрировании.

Переходим теперь к операции *альтернации.* Она производится так. Из одноименных индексов данного тензора произвольно выбирается некоторое их число N, над этими индексами производятся $N!$ всевозможных подстановок, результаты четных подстановок берутся со своим знаком, а у результатов нечетных подстановок знак меняется на обратный, и берется, наконец, среднее арифметическое всех полученных при этом $N!$ тензоров. Результат альтернации обозначается тем, что участвующие в альтернации индексы берутся в прямые скобочки.

В случае $N=1$ подстановка лишь одна, тождественная, альтернирование тривиально и не меняет тензора.

В случае $N=2$ альтернация имеет вид

$$a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}). \tag{31.5}$$

В случае $N=3$ получаем:

$$a_{[ijk]}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}). \tag{31.6}$$

Кроме индексов, участвующих в альтернации, у рассматриваемых тензоров могут быть и другие, явно не выписанные индексы.

Мы называем тензор *кососимметрическим* по нескольким данным (обязательно одноименным) индексам, если он умножается на -1 при транспозиции любых двух из этих индексов (и, следовательно, умножается на -1 при любой нечетной подстановке и не меняется при четной подстановке этих индексов). Таков, например, дважды ковариантный тензор, координаты которого образуют кососимметрическую матрицу

$$a_{ij}=-a_{ji}, \tag{31.7}$$

или трижды ковариантный тензор, обладающий свойством

$$a_{ijk}=a_{jki}=a_{kij}=-a_{jik}=-a_{kji}=-a_{ikj}. \tag{31.8}$$

В результате альтернации *всегда* получается, как легко проверить, тензор кососимметрический по тем индексам, которые участвовали в альтернации.

Если тензор кососимметричен по данным индексам, то альтернация по этим индексам его не меняет. Действительно, если, например, a_{ijk} кососимметричен по трем своим индексам, т. е. обладает свойством (31.8), то в скобках (31.6) все шесть слагаемых равны между собой, и мы получаем:

$$a_{[ijk]}=a_{ijk}.$$

Отметим также, что если из тех индексов, по которым тензор кососимметричен, хотя бы два имеют одинаковые значения, то соответствующая координата обращается в нуль.

Действительно, при транспозиции этих двух индексов координата должна изменить знак в силу косой симметрии; с другой же стороны, она не изменится в силу равенства индексов. Следовательно, она равна нулю.