§ 32. Степень произвола в выборе тензора данного строения

Мы установили основы тензорной алгебры, оперируя с произвольными тензорами, однако мы, строго говоря, до сих пор не знаем, существуют ли тензоры любого строения (т. е. с любым числом индексов наверху и внизу), и если существуют, то с какой степенью произвола определяются. Ясно одно, что если координаты тензора заданы в одной координатной системе, то в силу тензорного закона преобразования они определятся и в любой координатной системе. Но всегда ли можно построить тензор, задавшись *произвольно* его координатами в какой-либо одной координатной системе? На этот вопрос мы отвечаем утвердительно и на основе вот каких соображений.

Зададимся произвольно координатами искомого тензора, например, a^i_{pq}, в какой-нибудь одной координатной системе S. *Если искомый тензор существует*, то его координаты в любой другой координатной системе S' будут определяться по тензорному закону преобразования:

$$a^{i'}_{p'q'} = A^{i'}_i A^p_{p'} A^q_{q'} a^i_{pq}. \tag{32.1}$$

Однако это еще не значит, что искомый тензор уже построен. Нужно еще убедиться, что тензорный закон преобразования действует не только при переходе от *данной к любой* координатной системе, но и при переходе от *любой к любой* координатной системе. Для этой цели рассмотрим еще одну произвольную координатную систему S''. Для нее аналогично (32.1) получаем:

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i''}_i A^p_{p''} A^q_{q''} a^i_{pq}. \tag{32.2}$$

Очевидно, по смыслу наших обозначений

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^{i'}_{i''} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^i_{i''} \mathbf{e}_i, \tag{32.3}$$

откуда легко следует (подстановкой из первого равенства во второе и сравнением с третьим), что

$$A^i_{i''} = A^{i'}_{i''} A^i_{i'}, \tag{32.4}$$

т. е. матрица, преобразующая $\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}_{i''}$, есть произведение матриц, преобразующих $\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}_{i'}$ и $\mathbf{e}_{i'}$ в $\mathbf{e}_{i''}$.

Аналогично для обратных преобразований имеем:

$$A^{i''}_i = A^{i'}_i A^{i''}_{i'}. \tag{32.5}$$

Заменяя теперь в формуле (32.2) $A^{i''}_i$, $A^p_{p''}$, $A^q_{q''}$ их значениями согласно (32.4) и (32.5), приведем ее к виду

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i'}_i A^{i''}_{i'} A^p_{p'} A^{p'}_{p''} A^q_{q'} A^{q'}_{q''} a^i_{pq}.$$

Пользуясь (32.1), получим окончательно

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i''}_{i'} A^{p'}_{p''} A^{q'}_{q''} a^{i'}_{p'q'}, \tag{32.6}$$

т. е. действительно тензорный закон преобразования имеет место и при переходе от любой координатной системы к любой другой.

Этим наше доказательство закончено. Основа его заключается просто в том, что наложению двух линейных преобразований над векторами репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ отвечает наложение соответствующих (и, очевидно, тоже линейных) преобразований над координатами тензора

§ 33. Об m-мерных плоскостях в n-мерном аффинном пространстве

Мы изложили в основных чертах тензорную алгебру и сейчас должны пополнить наши сведения по геометрии n-мерного аффинного пространства. Прежде всего мы рассмотрим в этом пространстве плоскости различных измерений.

Мы будем называть плоскостью множество точек, обладающее следующим свойством. Пусть A, B, C — произвольные точки этого множества. Построим вектор $\overrightarrow{AB}$, умножим его на произвольное число α и отложим от точки C, так что получится вектор

$$\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}. \tag{33.1}$$

Тогда точка D должна тоже принадлежать нашему множеству.

Всякий вектор $\overrightarrow{AB}$, где A и B принадлежат данной плоскости, мы будем называть вектором этой плоскости. Из определения плоскости видно, что при умножении на любое число α вектор данной плоскости (например, $\overrightarrow{AB}$) переходит в вектор той же плоскости (т. е. $\overrightarrow{CD}$), и при откладывании вектора данной плоскости из любой ее точки мы приходим в точку той же плоскости (вытекает из определения при $\alpha = 1$).

Теперь ясно, что все наши аксиомы 1°—9° имеют место для точек и векторов плоскости. Что же касается аксиомы размерности 10°, то она видоизменится: максимально возможное число m линейно независимых векторов на плоскости будет, вообще говоря, меньше n. Число m мы будем называть *размерностью данной плоскости.*

Мы видим, что m-мерная плоскость в n-мерном аффинном пространстве по свойствам своих точек и векторов представляет собой m-мерное аффинное пространство.