Пользуясь (32.1), получим окончательно

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i''}_{i'} A^{p'}_{p''} A^{q'}_{q''} a^{i'}_{p'q'}, \tag{32.6}$$

т. е. действительно тензорный закон преобразования имеет место и при переходе от любой координатной системы к любой другой.

Этим наше доказательство закончено. Основа его заключается просто в том, что наложению двух линейных преобразований над векторами репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ отвечает наложение соответствующих (и, очевидно, тоже линейных) преобразований над координатами тензора

§ 33. Об m-мерных плоскостях в n-мерном аффинном пространстве

Мы изложили в основных чертах тензорную алгебру и сейчас должны пополнить наши сведения по геометрии n-мерного аффинного пространства. Прежде всего мы рассмотрим в этом пространстве плоскости различных измерений.

Мы будем называть плоскостью множество точек, обладающее следующим свойством. Пусть A, B, C — произвольные точки этого множества. Построим вектор $\overrightarrow{AB}$, умножим его на произвольное число α и отложим от точки C, так что получится вектор

$$\overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{AB}. \tag{33.1}$$

Тогда точка D должна тоже принадлежать нашему множеству.

Всякий вектор $\overrightarrow{AB}$, где A и B принадлежат данной плоскости, мы будем называть вектором этой плоскости. Из определения плоскости видно, что при умножении на любое число α вектор данной плоскости (например, $\overrightarrow{AB}$) переходит в вектор той же плоскости (т. е. $\overrightarrow{CD}$), и при откладывании вектора данной плоскости из любой ее точки мы приходим в точку той же плоскости (вытекает из определения при $\alpha = 1$).

Теперь ясно, что все наши аксиомы 1°—9° имеют место для точек и векторов плоскости. Что же касается аксиомы размерности 10°, то она видоизменится: максимально возможное число m линейно независимых векторов на плоскости будет, вообще говоря, меньше n. Число m мы будем называть *размерностью данной плоскости.*

Мы видим, что m-мерная плоскость в n-мерном аффинном пространстве по свойствам своих точек и векторов представляет собой m-мерное аффинное пространство.

Пользуясь этим обстоятельством, на плоскости всегда можно выбрать аффинный репер, т. е. некоторую точку O^* и m линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Тогда радиус-вектор $\overrightarrow{O^*M}$ любой точки M на этой плоскости разлагается по векторам репера

$$\overrightarrow{O^*M} = t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^m\mathbf{a}_m, \tag{33.2}$$

где $t^1, \ldots, t^m$ — коэффициенты разложения, которые пробегают всевозможные численные значения, когда точка M описывает нашу плоскость.

Одним словом, мы повторяем построение аффинной координатной системы для m-мерного аффинного пространства, каким и является наша m-мерная плоскость.

При этом $\{O^*, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ будет репером, а $t^1, \ldots, t^m$ — соответствующими координатами.

Отсюда вытекает, что всякая m-мерная плоскость может быть построена следующим образом.

Берется некоторая точка O^* и m линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и строится множество всех точек M, для которых вектор $\overrightarrow{O^*M}$ допускает разложение по $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Последний вопрос, который нам нужно выяснить, — получим ли мы этим путем m-мерную плоскость при *любом* выборе точки O^* и m линейно независимых векторов.

Легко проверить, что ответ будет утвердительным. В самом деле, вектор $\overrightarrow{AB}$, соединяющий любые две точки A, B из построенного нами множества, может быть записан в виде

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O^*B} - \overrightarrow{O^*A}$$

и вместе с векторами $\overrightarrow{O^*B}$ и $\overrightarrow{O^*A}$ допускает разложение по $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$; то же остается верным и для вектора $\alpha\overrightarrow{AB}$; откладывая этот вектор от произвольной точки C нашего множества, получаем вектор $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{AB}$; так как $\overrightarrow{O^*D} = \overrightarrow{O^*C} + \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{O^*D}$ вместе с $\overrightarrow{O^*C}$ и $\overrightarrow{CD}$ разлагается по $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, а следовательно, точка принадлежит построенному множеству. Тем самым это множество представляет собой плоскость (согласно определению последней) и притом m-мерную, так как m линейно независимых векторов на ней имеются по построению, но все остальные от них линейно зависимы.

Векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ мы будем называть *направляющими векторами* данной плоскости.

Соотношения (33.2) легко позволяют записать уравнения m-мерной плоскости в n-мерном аффинном пространстве. Отнесем последнее к какому-либо аффинному реперу $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда радиус-вектор любой точки M из m-мерной плоскости может быть записан в виде

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^*} + \overrightarrow{O^*M} = \overrightarrow{OO^*} + t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^m\mathbf{a}_m. \tag{33.3}$$

Здесь $\overrightarrow{OO^*}$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ — постоянные векторы, а $t^1, \ldots, t^m$ — независимые переменные (аффинные координаты на плоскости), так что (33.3) можно рассматривать как параметрическое уравнение нашей плоскости в векторной форме.

Переходя в равенстве (33.3) от векторов к их координатам относительно аффинного репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, мы получим параметрические уравнения нашей плоскости в координатной форме:

$$x^i = a^i + t^1a_1^i + t^2a_2^i + \ldots + t^m a_m^i. \tag{33.4}$$

Здесь x^i — координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, а значит, и самой точки M, a^i — постоянные координаты вектора $\overrightarrow{OO^*}$, a_1^i — постоянные координаты вектора $\mathbf{a}_1$ и т. д.

В итоге текущие координаты x^i произвольной точки M нашей m-мерной плоскости выражаются линейными функциями m независимых параметров $t^1, \ldots, t^m$, причем все m столбцов матрицы коэффициентов линейно независимы между собой (что равносильно линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$; см. § 23).

Очевидно, что и обратно, уравнения вида (33.4) с условием максимального ранга ($= m$) для матрицы коэффициентов (т. е. с условием линейной независимости столбцов этой матрицы) всегда определяют m-мерную плоскость. Это легко проверить обратным переходом к векторной записи.

Наконец, уравнения m-мерной плоскости можно дать в неявной записи. Для этого достаточно из n уравнений (33.4) исключить m параметров $t^1, \ldots, t^m$, что всегда выполнимо в силу максимального ранга m матрицы коэффициентов. Считая, что ранговый минор матрицы образован, например, первыми m ее строками, мы можем выразить $t^1, \ldots, t^m$ через $x^1, \ldots, x^m$ из первых m уравнений ($i = 1, 2, \ldots, m$). Подставляя эти выражения в остальные уравнения ($i = m+1, \ldots, n$), мы получим:

$$\left.\begin{array}{c} x^{m+1} = b_1^{m+1}x^1 + \ldots + b_m^{m+1}x^m + b^{m+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^n = b_1^n x^1 + \ldots + b_m^n x^m + b^n. \end{array}\right\} \tag{33.5}$$

Коэффициенты b^p_q выражаются, конечно, через коэффициенты a^i_j, но как именно — нас сейчас не интересует.

Итак, m-мерная плоскость может быть задана $n-m$ независимыми линейными уравнениями между текущими координатами $x^1, \ldots, x^n$. Независимость полученных уравнений ясна из того, что в каждом из них выражена координата, отсутствующая в остальных.

То, что, обратно, уравнения вида (33.5) всегда определяют m-мерную плоскость, становится очевидным, если принять $x^1, \ldots, x^m$ за независимые параметры $t^1, \ldots, t^m$; тогда мы получаем частный случай параметрического задания m-мерной плоскости. Размерность плоскости m может принимать значения $0, 1, 2, \ldots, n$.

В случае $m=0$ уравнения (33.4) дают

$$x^i = a^i, \tag{33.6}$$

и плоскость сводится к точке.

В случае $m=1$

$$x^i = a^i + t^1 a^i_1, \tag{33.7}$$

и текущие координаты суть линейные функции одного параметра. Одномерную плоскость мы будем называть *прямой линией*. В векторной форме она задается начальной точкой O^* и одним направляющим вектором $\mathbf{a}_1 \neq 0$.

В случае $m=2$ мы получаем двумерную плоскость

$$x^i = a^i + t^1 a^i_1 + t^2 a^i_2, \tag{33.8}$$

для которой текущие координаты суть линейные функции двух независимых параметров. В векторной форме она задается начальной точкой O^* и двумя линейно независимыми направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Аналогично обстоит дело и при остальных значениях m. Особо следует отметить случай $m=n-1$, когда плоскость называется *гиперплоскостью*. Гиперплоскость может быть охарактеризована тем, что она задается *одним линейным* уравнением между текущими координатами. Действительно, $n-m$ уравнений (33.5) сводятся в этом случае к одному.

Наконец, наше определение плоскости допускает и случай $m=n$. Но тогда, очевидно, плоскость просто заполняет все пространство.

Для нас будет особенно важен случай, когда все рассматриваемые плоскости принадлежат одной связке — проходят через фиксированную точку O (которую мы примем за начало координат). Тогда для задания m-мерной плоскости достаточно знать ее направляющие векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Но та же самая плоскость может быть определена и любой другой системой направляющих векторов $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ — лишь бы они тоже принадлежали плоскости и были линейно независимы. Разумеется, как здесь, так и далее индекс m' имеет то же численное значение, что и m, и лишь в записи снабжен штрихом. Связь между старыми и новыми направляющими векторами m-мерной плоскости — это в сущности связь между векторами старого и нового репера в m-мерном аффинном пространстве. Мы можем записать ее аналогично § 24:

$$\mathbf{a}_{i'} = A^1_{i'}\mathbf{a}_1 + \ldots + A^m_{i'}\mathbf{a}_m \quad (i' = 1', 2', \ldots, m') \quad (\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| \neq 0), \tag{33.9}$$

и обратное преобразование:

$$\mathbf{a}_i = A^{1'}_i \mathbf{a}_{1'} + \ldots + A^{m'}_i \mathbf{a}_{m'} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{33.10}$$

Неудобство здесь заключается в том, что одна и та же плоскость связки задается весьма разнообразными системами направляющих векторов. Возникает вопрос, нельзя ли систему направляющих векторов заменить чем-то другим, что было бы уже однозначно или почти однозначно связано с плоскостью данной связки. Ответом на этот вопрос является понятие простого поливектора. Им мы займемся в §§ 34, 35.

§ 34. Бивектор и задание двумерной плоскости

Мы будем называть *бивектором* дважды контравариантный кососимметрический тензор

$$a^{ij} = -a^{ji}. \tag{34.1}$$

Бивектор мы будем называть *простым*, если он составлен из каких-нибудь двух векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ с координатами

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 (a^1_1, \ \ldots, \ a^n_1), \\ \mathbf{a}_2 (a^1_2, \ \ldots, \ a^n_2) \end{array}\right\} \tag{34.2}$$

по формуле

$$a^{ij} = \frac{1}{2}(a^i_1 a^j_2 - a^j_1 a^i_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a^i_1 & a^j_1 \\ a^i_2 & a^j_2 \end{vmatrix}. \tag{34.3}$$

Другими словами, простой бивектор получается перемножением контравариантных тензоров a^i_1, a^j_2 с последующей альтернацией:

$$a^{ij} = a^{[i}_1 a^{j]}_2. \tag{34.4}$$

Очевидно, порядок перемножаемых тензоров, т. е. порядок задания векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, играет здесь важную роль: если порядок