Но та же самая плоскость может быть определена и любой другой системой направляющих векторов $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ — лишь бы они тоже принадлежали плоскости и были линейно независимы. Разумеется, как здесь, так и далее индекс m' имеет то же численное значение, что и m, и лишь в записи снабжен штрихом. Связь между старыми и новыми направляющими векторами m-мерной плоскости — это в сущности связь между векторами старого и нового репера в m-мерном аффинном пространстве. Мы можем записать ее аналогично § 24:

$$\mathbf{a}_{i'} = A_{i'}^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + A_{i'}^m \mathbf{a}_m \quad (i' = 1', 2', \ldots, m') \quad (\operatorname{Det} | A_{i'}^i | \neq 0), \quad (33.9)$$

и обратное преобразование:

$$\mathbf{a}_i = A_i^{1'} \mathbf{a}_{1'} + \ldots + A_i^{m'} \mathbf{a}_{m'} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \quad (33.10)$$

Неудобство здесь заключается в том, что одна и та же плоскость связки задается весьма разнообразными системами направляющих векторов. Возникает вопрос, нельзя ли систему направляющих векторов заменить чем-то другим, что было бы уже однозначно или почти однозначно связано с плоскостью данной связки. Ответом на этот вопрос является понятие простого поливектора. Им мы займемся в §§ 34, 35.

§ 34. Бивектор и задание двумерной плоскости

Мы будем называть *бивектором* дважды контравариантный кососимметрический тензор

$$a^{ij} = -a^{ji}. \quad (34.1)$$

Бивектор мы будем называть *простым*, если он составлен из каких-нибудь двух векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ с координатами

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 (a_1^1, \ldots, a_1^n), \\ \mathbf{a}_2 (a_2^1, \ldots, a_2^n) \end{array}\right\} \quad (34.2)$$

по формуле

$$a^{ij} = \frac{1}{2} (a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1^i & a_1^j \\ a_2^i & a_2^j \end{vmatrix}. \quad (34.3)$$

Другими словами, простой бивектор получается перемножением контравариантных тензоров a_1^i, a_2^j с последующей альтернацией:

$$a^{ij} = a_1^{[i} a_2^{j]}. \quad (34.4)$$

Очевидно, порядок перемножаемых тензоров, т. е. порядок задания векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, играет здесь важную роль: если порядок заменить на обратный, бивектор, как легко заметить из (34.3), умножается на -1.

Простой бивектор, составленный из двух заданных в определенном порядке векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ согласно (34.3), мы будем называть *косым произведением* векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и кратко обозначать $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$.

Выясним основные свойства косого произведения. Прежде всего при перестановке множителей оно, как уже отмечалось, меняет знак:

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = -[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1]. \tag{34.5}$$

Отсюда в случае $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ получаем:

$$[\mathbf{a}\mathbf{a}] = -[\mathbf{a}\mathbf{a}], \quad \text{т. е.} \quad [\mathbf{a}\mathbf{a}] = 0. \tag{34.6}$$

Далее, из *линейной* зависимости координат косого произведения $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$ от координат одного из векторов, например $\mathbf{a}_1$, очевидно, следует, что при умножении $\mathbf{a}_1$ на произвольное число α бивектор умножается на то же число:

$$[\alpha\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2], \tag{34.7}$$

а также, что при замене $\mathbf{a}_1$ суммой двух (или нескольких) векторов бивектор распадается на сумму соответствующих бивекторов:

$$[\mathbf{a}_1' + \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2] = [\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2] + [\mathbf{a}_1''\mathbf{a}_2]. \tag{34.8}$$

Теперь нетрудно заметить, что для *линейной зависимости векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *необходимо и достаточно обращение в нуль их косого произведения.*

В самом деле, если $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависимы, например $\mathbf{a}_2 = \alpha\mathbf{a}_1$, то

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = [\mathbf{a}_1, \alpha\mathbf{a}_1] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1] = 0.$$

Обратно, если $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = 0$, то согласно (34.3)

$$\begin{vmatrix} a_1^i & a_1^j \\ a_2^i & a_2^j \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. обращаются в нуль все миноры 2-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 a_1^2 \dots a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 \dots a_2 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, между строками этой матрицы, а тем самым и между векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, имеется линейная зависимость.

Далее, исследуем вопрос, как меняется косое произведение векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ при их линейном преобразовании:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_{1'} &= A_{1'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_{2'} &= A_{2'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{a}_2. \end{aligned}\right\} \tag{34.9}$$

Составим косое произведение преобразованных векторов $\mathbf{a}_{1'}$, $\mathbf{a}_{2'}$:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'}] = [(A_{1'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{a}_2)(A_{2'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{a}_2)].$$

Раскрывая в правой части скобки, т. е. перемножая сумму на сумму почленно (согласно (34.8)), отбрасывая равные нулю косые произведения линейно зависимых векторов и вынося численные множители за знак косого произведения (согласно (34.7)), получим:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'}] = A_{1'}^1 A_{2'}^2 [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] + A_{1'}^2 A_{2'}^1 [\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1] = \begin{vmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 \end{vmatrix} [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]. \tag{34.10}$$

При последнем преобразовании мы воспользовались свойством (34.5).

Итак, косое произведение двух векторов в результате линейного преобразования этих векторов умножается на определитель линейного преобразования.

Допустим теперь, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ играют роль направляющих векторов некоторой двумерной плоскости и, следовательно, линейно независимы. Тогда линейное преобразование (34.9) с определителем, отличным от нуля, означает, очевидно, переход к любой другой паре направляющих векторов той же плоскости. Так как косое произведение $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$ приобретает при этом лишь численный множитель (не равный нулю), то мы получим следующий результат.

Косое произведение направляющих векторов двумерной плоскости, рассматриваемое с точностью до численного множителя (не равного нулю), зависит только от самой плоскости и не зависит от выбора направляющих векторов на ней.

Таким образом, каждой двумерной плоскости сопоставляется определенный с точностью до численного множителя простой бивектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$, который мы будем называть ее *направляющим бивектором*. Он никогда не равен 0 в силу линейной независимости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

Ясно, что, беря всевозможные плоскости, мы будем получать в качестве направляющих бивекторов всевозможные простые бивекторы.

Будем называть две плоскости одного числа измерений *параллельными*, если одна получается из другой сдвигом всех ее точек на постоянный вектор. Очевидно, при этом векторы одной плоскости переходят в равные им векторы другой плоскости. Следовательно, и направляющие векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ можно брать для параллельных плоскостей общими. А следовательно, в случае параллельных *двумерных* плоскостей общими будут и направляющие бивекторы.

Итак, параллельные двумерные плоскости обладают одним и тем же (определенным с точностью до численного множителя) направляющим бивектором.

Обратно, если две двумерные плоскости имеют один и тот же (определенный с точностью до численного множителя) направляющий бивектор, то эти плоскости параллельны. В самом деле, пусть одна плоскость имеет направляющий бивектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$, а другая — $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$. С точностью до численного множителя эти бивекторы должны совпадать, так что

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2],$$

т. е. согласно (34.3)

$$\frac{1}{2}(b_1^i b_2^j - b_1^j b_2^i) = \frac{\alpha}{2}(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i).$$

Свернем это равенство почленно с ковариантным тензором c_j, который подобран так, что

$$b_1^j c_j = 0, \quad b_2^j c_j = 1. \tag{34.11}$$

Этого, очевидно, всегда можно добиться ввиду линейной независимости направляющих векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, а следовательно, и строк матрицы

$$\begin{Vmatrix} b_1^1 & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & \ldots & b_2^n \end{Vmatrix}.$$

В результате свертывания получим $\left(\text{отбрасывая множители } \frac{1}{2}\right)$:

$$b_1^i \cdot b_2^j c_j - b_2^i \cdot b_1^j c_j = a_1^i\,(\alpha a_2^j c_j) - a_2^i\,(\alpha a_1^j c_j).$$

Учитывая равенства (34.11) и обозначая инварианты $\alpha a_2^j c_j, -\alpha a_1^j c_j$ через β^1, β^2, получаем окончательно:

$$b_1^i = \beta^1 a_1^i + \beta^2 a_2^i. \tag{34.12}$$

Мы видим, что тензор b_1^i оказывается линейной комбинацией тензоров a_1^i, a_2^i, т. е. вектор $\mathbf{b}_1$ разлагается по векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. То же самое, конечно, справедливо и для $\mathbf{b}_2$.

В результате направляющие векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ второй плоскости принадлежат и первой плоскости, а следовательно, могут служить и ее направляющими векторами. Таким образом, при построении обеих плоскостей разница может быть лишь в выборе начальной точки O^* (§ 33). Пусть O_1^*, O_2^* — начальные точки наших плоскостей. Тогда сдвигом на вектор $\overrightarrow{O_1^* O_2^*}$ мы приводим начальную точку O_1^* в совпадение с O_2^*, а так как направляющие векторы и без того общие, то первая плоскость придет в совпадение со второй. Следовательно, наши плоскости параллельны, и утверждение доказано.

Окончательный вывод: *для того чтобы две двумерные плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие бивекторы были одинаковы с точностью до численного множителя.*

Таким образом, направляющий бивектор характеризует целую совокупность параллельных между собой двумерных плоскостей, заполняющих все пространство, т.е., как мы будем говорить, *характеризует двумерное направление в пространстве.*

Если мы рассматриваем только плоскости некоторой связки (т. е. плоскости, проходящие через фиксированную точку O), то в нашей формулировке вместо *параллелизма* плоскостей следует говорить просто об их *совпадении.*

§ 35. Основные свойства m-векторов

Результаты предыдущего параграфа полностью переносятся с двумерного случая на случай любого числа измерений.

Тензор $a^{i_1 \dots i_m}$, m раз контравариантный и кососимметрический по всем своим индексам, мы будем называть *m-вектором (поливектором).*

m-вектор мы будем называть *простым*, если он составлен из каких-нибудь m заданных в определенном порядке векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ по формуле

$$a^{i_1 i_2 \dots i_m} = a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \dots & a_1^{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^{i_1} & a_m^{i_2} & \dots & a_m^{i_m} \end{vmatrix}. \quad (35.1)$$

Другими словами, мы перемножаем в заданном порядке тензоры $a_1^{i_1}$, $a_2^{i_2}$, ..., $a_m^{i_m}$, образованные координатами наших векторов, и результат альтернируем по всем индексам i_1, i_2, ..., i_m.

Нужно помнить при этом, что нижние индексы здесь не тензорные, а номера заданных векторов; альтернация, разумеется, к ним относиться не может.

Правильность записи в виде определителя проверяется без труда, если сопоставить определение альтернации по m индексам с прави-