и ее направляющими векторами. Таким образом, при построении обеих плоскостей разница может быть лишь в выборе начальной точки O^* (§ 33). Пусть O_1^*, O_2^* — начальные точки наших плоскостей. Тогда сдвигом на вектор $\overrightarrow{O_1^*O_2^*}$ мы приводим начальную точку O_1^* в совпадение с O_2^*, а так как направляющие векторы и без того общие, то первая плоскость придет в совпадение со второй. Следовательно, наши плоскости параллельны, и утверждение доказано.

Окончательный вывод: *для того чтобы две двумерные плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие бивекторы были одинаковы с точностью до численного множителя.*

Таким образом, направляющий бивектор характеризует целую совокупность параллельных между собой двумерных плоскостей, заполняющих все пространство, т.е., как мы будем говорить, *характеризует двумерное направление в пространстве.*

Если мы рассматриваем только плоскости некоторой связки (т. е. плоскости, проходящие через фиксированную точку O), то в нашей формулировке вместо *параллелизма* плоскостей следует говорить просто об их *совпадении.*

§ 35. Основные свойства m-векторов

Результаты предыдущего параграфа полностью переносятся с двумерного случая на случай любого числа измерений.

Тензор $a^{i_1 \dots i_m}$, m раз контравариантный и кососимметрический по всем своим индексам, мы будем называть *m-вектором (поливектором).*

m-вектор мы будем называть *простым*, если он составлен из каких-нибудь m заданных в определенном порядке векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ по формуле

$$a^{i_1 i_2 \dots i_m} = a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \dots & a_1^{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^{i_1} & a_m^{i_2} & \dots & a_m^{i_m} \end{vmatrix}. \quad (35.1)$$

Другими словами, мы перемножаем в заданном порядке тензоры $a_1^{i_1}$, $a_2^{i_2}$, ..., $a_m^{i_m}$, образованные координатами наших векторов, и результат альтернируем по всем индексам i_1, i_2, ..., i_m.

Нужно помнить при этом, что нижние индексы здесь не тензорные, а номера заданных векторов; альтернация, разумеется, к ним относиться не может.

Правильность записи в виде определителя проверяется без труда, если сопоставить определение альтернации по m индексам с правилом составления определителя m-го порядка в виде суммы $m!$ членов. Действительно, и в том и другом случае мы должны в произведении $a_1^{i_1}a_2^{i_2} \ldots a_m^{i_m}$ (это произведение элементов по главной диагонали определителя) проделать всевозможные подстановки из индексов i_1, $i_2, \ldots, i_m$ и сложить полученные результаты, беря их со знаком $\pm$ в зависимости от четности или нечетности подстановки (в случае альтернации к этому еще присоединяется деление на $m!$).

Простой m-вектор (35.1) мы будем называть *косым произведением* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и обозначать кратко $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$.

m-векторы вообще и простые в частности имеет смысл рассматривать лишь при $m = 1, 2, 3, \ldots, n$. Дело в том, что при $m > n$ всякий m-вектор тождественно равен нулю.

Действительно, среди m индексов каждой его координаты обязательно должны найтись, по крайней мере, два одинаковых, а следовательно, каждая его координата равна нулю (см. конец § 31).

Полагая $m = n$, рассмотрим произвольный n-вектор $a^{i_1i_2\ldots i_n}$ (как увидим, он всегда будет простым). Всякий n-вектор имеет лишь одну существенную координату $a^{12\ldots n}$. Действительно, все остальные его координаты $a^{i_1i_2\ldots i_n}$ или равны нулю, если среди индексов i_1, $i_2, \ldots, i_n$ имеется хоть два одинаковых, или равны $\pm a^{12\ldots n}$, если все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ различные и, следовательно, получаются из $1, 2, \ldots, n$ некоторой подстановкой ($\pm$ в зависимости от четности или нечетности этой подстановки).

В связи с этим любые два n-вектора $a^{i_1\ldots i_n}$ и $b^{i_1\ldots i_n}$ отличаются друг от друга лишь инвариантным численным множителем:

$$b^{i_1\ldots i_n} = \lambda a^{i_1\ldots i_n}, \tag{35.2}$$

если положить

$$\lambda = \frac{b^{12\ldots n}}{a^{12\ldots n}} \tag{35.3}$$

(предполагается, что $a^{12\ldots n} \neq 0$).

Действительно, λ подобрано так, что (35.2) соблюдается при $i_1i_2 \ldots i_n = 12 \ldots n$. Но тем самым оно соблюдается и всегда, так как остальные координаты наших n-векторов или такие же, как при $i_1i_2 \ldots i_n = 12 \ldots n$ или отличаются лишь знаком, или равны нулю. Инвариантность же коэффициента λ вытекает из того, что $a^{i_1\ldots i_n}$ и $b^{i_1\ldots i_n}$ преобразуются по одинаковому закону.

Решим теперь еще один важный вопрос, касающийся n-вектора. Так как все его координаты выражаются через координату $a^{12\ldots n}$, то закон их преобразования сводится к закону преобразования этой единственно существенной координаты.

Этот последний мы и хотим вывести. Запишем тензорный закон преобразования для нашего случая

$$a^{1'2'\dots n'} = A^{1'}_{i_1} A^{2'}_{i_2} \dots A^{n'}_{i_n} a^{i_1 i_2 \dots i_n}. \tag{35.4}$$

При суммировании по $i_1, i_2, \dots, i_n$ мы откинем все слагаемые, где среди этих индексов встречаются равные, так как в этом случае все равно $a^{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$. Остаются слагаемые, в которых $i_1, i_2, \dots$ $\dots, i_n$ все различны, т. е. получены некоторой подстановкой из 1, 2, ..., n. Но в таком случае

$$a^{i_1 i_2 \dots i_n} = \pm a^{12 \dots n}, \tag{35.5}$$

знак $\pm$ выбирается в зависимости от четности или нечетности подстановки. Вставляя выражение для $a^{i_1 i_2 \dots i_n}$ из (35.5) в (35.4) и вынося $a^{12 \dots n}$ за скобки, получим:

$$a^{1'2'\dots n'} = a^{12 \dots n} \sum \pm A^{1'}_{i_1} A^{2'}_{i_2} \dots A^{n'}_{i_n},$$

где сумма берется по всевозможным подстановкам $12 \dots n \to$ $\to i_1 i_2 \dots i_n$ и представляет собой, очевидно, определитель $\operatorname{Det} | A^{i'}_{i} |$.

Окончательно получаем:

$$a^{1'2'\dots n'} = a^{12 \dots n} \operatorname{Det} | A^{i'}_{i} |. \tag{35.6}$$

Единственная существенная координата n-вектора при переходе в новую координатную систему умножается на определитель $\operatorname{Det} |A^{i'}_{i}|$.

В связи с этим $a^{12 \dots n}$ можно назвать *относительным инвариантом веса* —1. Вообще же *относительным инвариантом веса p* (p — целое) называется величина, имеющая определенное численное значение в каждой координатной системе и при переходе от старой к новой координатной системе умножающаяся на

$$\{\operatorname{Det} | A^{i'}_{i} |\}^{-p} = \{\operatorname{Det} | A^{i}_{i'} |\}^{p}. \tag{35.7}$$

Вернемся к общему случаю простого m-вектора ($m = 2, 3, \dots, n$)*) и установим его основные свойства. Когда в косом произведении $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m]$ мы меняем местами два множителя, то в определителях (35.1), выражающих его координаты, меняются местами две строки, и косое произведение умножается на —1.

Отсюда совершенно так же, как в предыдущем параграфе, вытекает, что при наличии двух одинаковых множителей косое произведение обращается в нуль.

---

*) При $m = 1$ мы получаем просто вектор.

Далее, из той же записи (35.1) виден *линейный* характер зависимости координат косого произведения от координат любого из множителей (например, множителя $\mathbf{a}_1$), m координатами которого образована первая строка определителя.

Отсюда совершенно так же, как для бивектора, вытекает

$$[\alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] \tag{35.8}$$

и

$$[\mathbf{a}_1' + \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = [\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] + [\mathbf{a}_1''\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]. \tag{35.9}$$

Разумеется, совершенно теми же свойствами обладает любой множитель косого произведения.

Теперь докажем теорему: *для линейной зависимости векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *необходимо и достаточно обращение в нуль их косого произведения.*

Необходимость. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, например, $\mathbf{a}_1$ разлагается по остальным векторам с коэффициентами $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m.$$

Тогда

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = [\alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = \\ = \alpha_2[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] + \ldots + \alpha_m[\mathbf{a}_m\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = 0.$$

Равенство нулю вытекает из того, что в каждом из полученных косых произведений имеется два одинаковых множителя.

Достаточность. Пусть $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = 0$; тогда обращаются в нуль все определители (35.1), т. е. все миноры m-го порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^1 & a_m^2 & \ldots & a_m^n \end{matrix} \right\|, \tag{35.10}$$

образованной координатами наших векторов. Тем самым между строками матрицы, а следовательно, и между нашими векторами имеется линейная зависимость.

Из доказанной теоремы следует, между прочим, что простой n-вектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$ в случае линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ отличен от нуля. Следовательно, *любой другой n-вектор*, отличаясь от него лишь численным множителем λ, *тоже будет простым* (множитель λ можно включить, например, в $\mathbf{a}_1$).

Заметим, кстати, что любой $n-1$-вектор тоже всегда является простым.

Выясним теперь, как преобразуется косое произведение m векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ при их произвольном линейном преобразовании в векторы $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_{1'} = A^1_{1'}\mathbf{a}_1 + A^2_{1'}\mathbf{a}_2 + \ldots + A^m_{1'}\mathbf{a}_m = A^{i_1}_{1'}\mathbf{a}_{i_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_{m'} = A^1_{m'}\mathbf{a}_1 + A^2_{m'}\mathbf{a}_2 + \ldots + A^m_{m'}\mathbf{a}_m = A^{i_m}_{m'}\mathbf{a}_{i_m} \end{array}\right\} \tag{35.11}$$

при помощи квадратной матрицы $A^i_{i'}$ порядка m. Мы позволяем себе здесь в виде исключения сокращенную запись суммирования, несмотря на то, что индексы суммирования $i_1, \ldots, i_m$ пробегают значения $1, 2, \ldots, m$, а не $1, 2, \ldots, n$.

Составим косое произведение:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = \left[A^{i_1}_{1'}\mathbf{a}_{i_1},\ A^{i_2}_{2'}\mathbf{a}_{i_2},\ \ldots,\ A^{i_m}_{m'}\mathbf{a}_{i_m}\right] = \\ = A^{i_1}_{1'}A^{i_2}_{2'} \ldots A^{i_m}_{m'}[\mathbf{a}_{i_1}\mathbf{a}_{i_2} \ldots \mathbf{a}_{i_m}].$$

Полученное выражение с формальной стороны вполне аналогично (35.4), отличаясь от него только тем, что число множителей $A^{i_k}_{k'}$ здесь m, а не n, и индексы суммирования пробегают значения $1, \ldots, m$ (а не $1, \ldots, n$), а также тем, что верхние и нижние индексы поменялись ролями. Роль $a^{i_1 \ldots i_n}$ играет сейчас $[\mathbf{a}_{i_1} \ldots \mathbf{a}_{i_m}]$, также кососимметрическое по всем своим индексам. Поэтому аналогичным образом получим:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]\,\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|\,. \tag{35.12}$$

Итак, косое произведение m векторов в результате их линейного преобразования умножается на определитель матрицы этого преобразования.

Докажем теперь следующую важную теорему.

Для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ *разлагался по линейно независимым векторам* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, *необходимо и достаточно соблюдение условия*

$$a^{[i}a^{i_1 i_2 \ldots i_m]} = 0, \tag{35.13}$$

где $a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$ — *координаты косого произведения* $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$.

Разберемся прежде всего в смысле условия (35.13). В процессе альтернации мы, строго говоря, должны взять среднее арифметическое $(m+1)!$ слагаемых, полученных в результате всевозможных подстановок $m+1$ индексов (с изменением знака в случае нечетной подстановки). Однако фактически у нас будет лишь $m+1$ существенно различных слагаемых, так как каждое слагаемое встретится нам $m!$ раз. В самом деле, те $m!$ подстановок индексов в слагаемом, например, $a^i a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, которые затрагивают лишь последние m

индексов, дадут нам (в силу косой симметрии $a^{i_1 i_2 \dots i_m}$ и правила изменения знака в случае нечетной подстановки) одинаковые слагаемые. В таком случае достаточно взять среднее арифметическое лишь $m+1$ существенно различных слагаемых. В качестве таковых можно взять слагаемое $a^i a^{i_1 \dots i_m}$ и те m слагаемых, которые получаются из него поочерёдной транспозицией индекса i с $i_1, i_2, \dots, i_m$, конечно, с изменением знака (ввиду нечетности транспозиции). Получаем развернутое выражение:

$$a^{[i} a^{i_1 i_2 \dots i_m]} =$$
$$= \frac{1}{m+1} \left(a^i a^{i_1 i_2 \dots i_m} - a^{i_1} a^{i i_2 \dots i_m} - a^{i_2} a^{i_1 i \dots i_m} - \dots - a^{i_m} a^{i_1 i_2 \dots i} \right). \tag{35.14}$$

Для доказательства теоремы нам придется преобразовать условие (35.13). Координаты косого произведения имеют по определению вид

$$a^{i_1 \dots i_m} = a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]}.$$

Вставляя это выражение в (35.13), получаем:

$$a^{[i} a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]]} = 0. \tag{35.15}$$

Внутреннюю альтернацию (и это общее правило) можно выкинуть, раз она покрывается внешней альтернацией. Результат от этого не изменится. В самом деле, пользуясь выражением (35.14), получаем:

$$a^{[i} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]]} =$$
$$= \frac{1}{m+1} \left(a^i a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]} - a^{i_1} a_1^{[i} \dots a_m^{i_m]} - \dots - a^{i_m} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i]} \right).$$

Осуществляя теперь оставшиеся альтернации, в каждом случае по m индексам, мы получим из каждого члена $m!$ слагаемых (с последующим делением на $m!$).

Всего мы получим $(m+1)!$ слагаемых, составленных, очевидно, по правилу альтернации выражения $a^i a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$ по всем его верхним индексам и с последующим делением на $m!(m+1) = (m+1)!$. Другими словами,

$$a^{[i} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]]} = a^{[i} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m]}. \tag{35.16}$$

Теперь условие (35.13) принимает вид

$$a^{[i} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m]} = 0, \quad \text{т. е.} \quad [\mathbf{a} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m] = 0. \tag{35.17}$$

Но в таком виде наше условие по выше доказанному равносильно линейной зависимости векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, а так как

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно независимы, то равносильно линейной зависимости $\mathbf{a}$ от $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь какую-либо m-мерную плоскость с направляющими (и тем самым линейно независимыми) векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Косое произведение этих векторов $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$, очевидно, не равное нулю, мы будем называть *направляющим m-вектором нашей плоскости.*

При любом выборе направляющих векторов на данной плоскости ее направляющий m-вектор с точностью до численного множителя остается прежним. Это непосредственно следует из результата (35.12), если считать, что формулы (35.11) дают переход от старых к новым направляющим векторам на данной m-мерной плоскости (при этом $\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}| \neq 0$).

Обратно, *если у двух m-мерных плоскостей направляющие m-векторы отличаются лишь численным множителем*

$$[\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_m]^{*} = \alpha\,[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m], \tag{35.18}$$

то эти плоскости параллельны (т. е. получаются одна из другой сдвигом всех точек на постоянный вектор).

Действительно, пусть $a^{i_1 \ldots i_m}$ и $b^{i_1 \ldots i_m}$ — координаты направляющих m-векторов $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ и $[\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_m]$ первой и второй плоскости. Нам дано, что

$$b^{i_1 \ldots i_m} = \alpha a^{i_1 \ldots i_m}.$$

Согласно (35.13), для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ разлагался по $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, т. е. чтобы он принадлежал первой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли условию

$$a^{[i} a^{i_1 \ldots i_m]} = 0. \tag{35.19}$$

Совершенно аналогично, для того чтобы $\mathbf{a}$ принадлежал второй плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{[i} b^{i_1 \ldots i_m]} = 0. \tag{35.20}$$

Но оба последних условия равносильны вследствие (35.18). Поэтому все векторы, принадлежащие второй плоскости, принадлежат и первой плоскости, и наоборот. В частности, векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ принадлежат и первой плоскости и могут служить направляющими векторами на ней наряду с $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Теперь достаточно сделать параллельный сдвиг, переводящий какую-нибудь одну точку второй плоскости в какую-нибудь точку первой плоскости, чтобы обе плоскости совместились. Тем самым наше утверждение доказано.

Резюмируем: *для того чтобы две m-мерные плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие*

m-векторы, рассматриваемые с точностью до численного множителя, были одинаковы.

Это можно выразить и в такой форме, что направляющий m-вектор, заданный с точностью до численного множителя, характеризует *m-мерное направление в пространстве*, т. е. совокупность параллельных между собой m-мерных плоскостей, заполняющих все пространство.

Если мы ограничиваемся плоскостями некоторой связки O, то параллелизм плоскостей будет означать просто их совпадение, которое и будет равносильно совпадению направляющих m-векторов.

Наконец, последнее замечание. Вся *алгебраическая* теория, развитая здесь для кососимметрических *контравариантных* тензоров $a^{i_1 \dots i_m}$ (m-векторов), повторяется, конечно, дословно и для кососимметрических *ковариантных* тензоров $a_{i_1 \dots i_m}$ (которые мы будем называть *m-ковекторами*). Более того, можно установить своеобразный принцип двойственности, по которому каждому m-вектору взаимно однозначно сопоставляется $n-m$-ковектор, и обратно (при условии задания некоторого фиксированного n-вектора). Мы не будем останавливаться здесь на этом подробнее *). Укажем только, что совершенно аналогично (35.6) можно получить, что единственная существенная координата $a_{12 \dots n}$ n-ковектора $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$ преобразуется по закону

$$a_{1'2' \dots n'} = a_{12 \dots n} \operatorname{Det} |A^i_{i'}|. \tag{35.21}$$

Тем самым, согласно (35.7), $a_{12 \dots n}$ представляет собой относительный инвариант веса $+1$ (определители в (35.6) и (35.21) представляют собой взаимно обратные величины как определители взаимно обратных матриц). Отсюда вытекает, что произведение существенных координат n-вектора и n-ковектора $a^{12 \dots n} \cdot a_{12 \dots n}$ представляет собой инвариант.

Если, в частности,

$$a^{12 \dots n} \cdot a_{12 \dots n} = 1, \tag{35.22}$$

то n-вектор и n-ковектор мы будем называть *взаимно сопряженными*. Ясно, что по данному n-вектору всегда можно построить сопряженный ему n-ковектор, и обратно.

Что касается *геометрического* истолкования m-ковекторов, то на нем мы останавливаться не будем. Укажем лишь, что по упомянутому принципу двойственности (кстати, имеющему непосредственное отношение к принципу двойственности в $n-1$-мерной проективной геометрии в связке O) каждое m-мерное направление в про-

---

*) См., например, П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М.— Л., Гостехиздат, 1947, гл. II.

странстве характеризуется $n-m$-ковектором, заданным с точностью до численного множителя. Так, например (при $m=n-1$), $n-1$-мерное направление характеризуется 1-ковектором a_i, а именно, это есть направление гиперплоскости, уравнение которой

$$a_i x^i = 0.$$

§ 36. Ориентация в n-мерном аффинном пространстве

Будем рассматривать в n-мерном *вещественном* аффинном пространстве*) всевозможные реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Легко заметить, что они распадаются на два класса аналогично «правым» и «левым» реперам в обычном трехмерном пространстве. А именно, выбрав произвольно некоторый начальный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, мы распределим все вообще реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ на два класса по следующему принципу. Запишем разложение векторов произвольного репера по векторам начального репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i.$$

Если $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| > 0$, то мы относим произвольно взятый репер к первому классу, если же $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| < 0$, то — ко второму классу. Начальный репер попадет, очевидно, в первый класс (матрица $A^i_{i'}$ будет в этом случае единичной). Покажем теперь, что это распадение реперов на два класса не зависит от выбора начального репера (если не считать нумерации этих классов, которая, конечно, определяется выбором начального репера).

Для этого достаточно показать, что *любые два репера одного класса связаны между собой преобразованием с положительным определителем, а в случае разных классов — с отрицательным определителем*. Тогда действительно, исходя из любого начального репера, мы получим разбиение реперов на те же два класса (с точностью до их нумерации).

Возьмем два произвольных репера $(O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$ и $(O'', \mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''})$. Пусть они связаны с исходным репером и между собой преобразованиями:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^{i'}_{i''} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^i_{i''} \mathbf{e}_i. \tag{36.1}$$

Очевидно, третье преобразование есть результат наложения первых двух, так что его матрица есть произведение матриц:

$$A^i_{i''} = A^{i'}_{i''} A^i_{i'}, \tag{36.2}$$

*) Результаты главы II, за исключением §§ 36, 37, одинаково применимы и к вещественным и к комплексным аффинным пространствам.