странстве характеризуется $n-m$-ковектором, заданным с точностью до численного множителя. Так, например (при $m=n-1$), $n-1$-мерное направление характеризуется 1-ковектором a_i, а именно, это есть направление гиперплоскости, уравнение которой

$$a_i x^i = 0.$$

§ 36. Ориентация в n-мерном аффинном пространстве

Будем рассматривать в n-мерном *вещественном* аффинном пространстве*) всевозможные реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Легко заметить, что они распадаются на два класса аналогично «правым» и «левым» реперам в обычном трехмерном пространстве. А именно, выбрав произвольно некоторый начальный репер $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, мы распределим все вообще реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ на два класса по следующему принципу. Запишем разложение векторов произвольного репера по векторам начального репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i.$$

Если $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| > 0$, то мы относим произвольно взятый репер к первому классу, если же $\operatorname{Det}|A^i_{i'}| < 0$, то — ко второму классу. Начальный репер попадет, очевидно, в первый класс (матрица $A^i_{i'}$ будет в этом случае единичной). Покажем теперь, что это распадение реперов на два класса не зависит от выбора начального репера (если не считать нумерации этих классов, которая, конечно, определяется выбором начального репера).

Для этого достаточно показать, что *любые два репера одного класса связаны между собой преобразованием с положительным определителем, а в случае разных классов — с отрицательным определителем.* Тогда действительно, исходя из любого начального репера, мы получим разбиение реперов на те же два класса (с точностью до их нумерации).

Возьмем два произвольных репера $(O', \mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$ и $(O'', \mathbf{e}_{1''}, \ldots, \mathbf{e}_{n''})$. Пусть они связаны с исходным репером и между собой преобразованиями:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^{i'}_{i''} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^i_{i''} \mathbf{e}_i. \tag{36.1}$$

Очевидно, третье преобразование есть результат наложения первых двух, так что его матрица есть произведение матриц:

$$A^i_{i''} = A^{i'}_{i''} A^i_{i'}, \tag{36.2}$$

*) Результаты главы II, за исключением §§ 36, 37, одинаково применимы и к вещественным и к комплексным аффинным пространствам.

а значит,

$$\operatorname{Det}|A^{i}_{i''}| = \operatorname{Det}|A^{i'}_{i''}|\cdot\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}|. \qquad (36.3)$$

Если взятые реперы одного класса, т. е. $\operatorname{Det}|A^{i}_{i''}|$ и $\operatorname{Det}|A^{i}_{i'}|$ одного знака, то отсюда следует

$$\operatorname{Det}|A^{i'}_{i''}| > 0,$$

если же разных классов и, следовательно, указанные определители разных знаков, то

$$\operatorname{Det}|A^{i'}_{i''}| < 0.$$

Этим наше утверждение доказано.

Мы условимся говорить, что два репера имеют *одинаковую ориентацию* или *различные ориентации* в зависимости от того, принадлежат ли они к одному классу или к различным классам.

В случае $n=1$ (прямая линия) репер $(O, \mathbf{e}_1)$ имеет одну ориентацию, если вектор $\mathbf{e}_1$ направлен в данную сторону, и другую, если он направлен в противоположную сторону. Таким образом, выбор ориентации сводится к выбору определенного направления на прямой.

В случае двумерного аффинного пространства, т. е. в сущности в случае обычной плоскости, рассматриваемой в пределах ее аффинных свойств, ориентацию можно представлять себе наглядно в виде определенным образом заданного *направления вращения* на плоскости (против или по часовой стрелке).

Тогда реперами $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ данной ориентации будут те, для которых направление вектора $\mathbf{e}_1$, вращаясь около O в заданную сторону, приходит в совпадение с направлением вектора $\mathbf{e}_2$ в течение первого полуоборота.

Нужно пояснить, что в этой формулировке мы не выходим за пределы аффинных свойств, так как вращаются не целые фигуры, а лишь направления, исходящие из данной точки.

В случае $n=3$ распадение реперов на два класса вполне аналогично их распадению на «правые» и «левые» в обычном пространстве.

Мы говорим, что n-мерное аффинное пространство *ориентировано*, если из двух возможных ориентаций избрана одна определенная (т. е. избран один из двух классов реперов).

Все сказанное относится и к m-мерным плоскостям n-мерного пространства, так как они по своей геометрии являются также аффинными пространствами. Соответствующий m-мерный репер, ориентация которого будет рассматриваться, образуется какой-нибудь точкой O^* и направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ данной m-мерной плоскости. При этом не нужно забывать, что ориентация репера в той же мере зависит от нумерации его векторов, как и от выбора самих этих векторов. Составим направляющий m-вектор $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ данной m-мерной плоскости. Если мы перейдем в ней к другому реперу $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ посредством линейного преобразования с матрицей m-го порядка $\| A^i_{i'} \|$

$$\mathbf{a}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{a}_i,$$

то согласно (35.12)

$$[\mathbf{a}_{1'} \mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] \operatorname{Det} | A^i_{i'} |.$$

Если новый репер имеет ту же ориентацию, что и старый, то определитель, на который множится направляющий m-вектор, будет, как мы видим, положительным; в противном случае — отрицательным. Мы получаем следующий результат.

Все направляющие m-векторы данной m-мерной плоскости, отвечающие m-мерным реперам одинаковой ориентации, отличаются лишь положительными численными множителями; при изменении ориентации репера на обратную направляющий m-вектор приобретает отрицательный численный множитель.

Отсюда вытекает, что *если направляющий m-вектор задан нам с точностью до положительного численного множителя, то у нас определено не только m-мерное направление в пространстве, но и определенная ориентация на каждой m-мерной плоскости этого направления* (*т. е. из двух классов реперов на ней избран один определенный*).

§ 37. Измерение объемов

Пусть в вещественном n-мерном аффинном пространстве дано некоторое тело D. Отнесем пространство к какой-нибудь аффинной координатной системе $(x^1, \ldots, x^n)$ и составим n-кратный интеграл

$$V_D = \int\limits_D dx^1 \, dx^2 \ldots dx^n, \tag{37.1}$$

распространенный по области D. Мы будем рассматривать лишь такие области D (например, ограниченные кусочно гладкими гиперповерхностями), для которых существование этого интеграла не вызывает сомнений.

При переходе в другую координатную систему $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ получаем в силу (24.20)

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}. \tag{37.2}$$