самих этих векторов. Составим направляющий m-вектор $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ данной m-мерной плоскости. Если мы перейдем в ней к другому реперу $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ посредством линейного преобразования с матрицей m-го порядка $\| A^i_{i'} \|$

$$\mathbf{a}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{a}_i,$$

то согласно (35.12)

$$[\mathbf{a}_{1'} \mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] \operatorname{Det} | A^i_{i'} |.$$

Если новый репер имеет ту же ориентацию, что и старый, то определитель, на который множится направляющий m-вектор, будет, как мы видим, положительным; в противном случае — отрицательным. Мы получаем следующий результат.

Все направляющие m-векторы данной m-мерной плоскости, отвечающие m-мерным реперам одинаковой ориентации, отличаются лишь положительными численными множителями; при изменении ориентации репера на обратную направляющий m-вектор приобретает отрицательный численный множитель.

Отсюда вытекает, что *если направляющий m-вектор задан нам с точностью до положительного численного множителя, то у нас определено не только m-мерное направление в пространстве, но и определенная ориентация на каждой m-мерной плоскости этого направления* (*т. е. из двух классов реперов на ней избран один определенный*).

§ 37. Измерение объемов

Пусть в вещественном n-мерном аффинном пространстве дано некоторое тело D. Отнесем пространство к какой-нибудь аффинной координатной системе $(x^1, \ldots, x^n)$ и составим n-кратный интеграл

$$V_D = \int_D dx^1 \, dx^2 \ldots dx^n, \tag{37.1}$$

распространенный по области D. Мы будем рассматривать лишь такие области D (например, ограниченные кусочно гладкими гиперповерхностями), для которых существование этого интеграла не вызывает сомнений.

При переходе в другую координатную систему $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ получаем в силу (24.20)

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}. \tag{37.2}$$

Аналогичный интеграл имеет вид

$$V'_D=\int\limits_D dx^{1'}\,dx^{2'}\ldots dx^{n'}=\int\limits_D\left|\frac{\partial(x^{1'},\ldots,x^{n'})}{\partial(x^1,\ldots,x^n)}\right|dx^1\,dx^2\ldots dx^n=$$
$$=\int\limits_D|\operatorname{Det}|A_i^{i'}||\,dx^1\ldots dx^n=|\operatorname{Det}|A_i^{i'}||\cdot\int\limits_D dx^1\ldots dx^n=$$
$$=|\operatorname{Det}|A_i^{i'}||\cdot V_D. \qquad (37.3)$$

Мы воспользовались здесь формулой преобразования переменных под знаком кратного интеграла, причем якобиан преобразования совпадает с $\operatorname{Det}|A_i^{i'}|$, так как из преобразования (37.2) следует, что

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}=A_i^{i'}.$$

Итак, интегралы V_D для всех областей D умножаются при переходе в новую координатную систему на общий множитель $|\operatorname{Det}|A_i^{i'}||$.

Другими словами, интеграл V_D для данного тела D можно рассматривать как относительный инвариант веса -1 с той только разницей, что его преобразование сводится к умножению не на $\operatorname{Det}|A_i^{i'}|$, а на $|\operatorname{Det}|A_i^{i'}||$ (ср. (35.6)).

Чтобы отметить это, мы будем называть V_D *знакопостоянным относительным инвариантом веса* -1; впрочем, прилагательное «знакопостоянный» мы будем для краткости большей частью опускать.

Относительный инвариант V_D мы будем называть объемом тела D.

Таким образом, в аффинной геометрии объем данного тела не выражается каким-либо определенным числом и меняется вместе с координатной системой. Тем не менее между объемами существуют соотношения, вполне аналогичные обычным и в отличие от самого объема *инвариантные относительно выбора координатной системы*.

1. Равенство объемов двух тел

$$V_{D_1}=V_D, \qquad (37.4)$$

сохраняется при переходе в любую другую координатную систему.

2. Если объем тела D равен сумме объемов тел D_1 и D_2

$$V_D=V_{D_1}+V_{D_2} \qquad (37.5)$$

в одной координатной системе, то это верно и в любой другой.

3. Отношение объемов двух тел D и D'

$$\frac{V_D}{V_{D'}} = k \tag{37.6}$$

есть инвариант преобразования координатной системы.

Все эти утверждения очевидным образом следуют из одинакового для всех V_D закона преобразования (37.3).

Введенное нами понятие объема, вернее, те инвариантные соотношения, к которым оно приводит, хорошо согласуются с нашим обычным представлением об объеме.

Так, при параллельном сдвиге тела D на вектор $\mathbf{a}$ в положение $\tilde{D}$ его объем, как мы и ожидаем, не изменится. Действительно,

$$V_D = \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n, \quad V_{\tilde{D}} = \int\limits_{\tilde{D}} d\tilde{x}^1 \ldots d\tilde{x}^n.$$

Но при этом $\tilde{x}^i = x^i + a^i$, где a^i — постоянные координаты вектора сдвига $\mathbf{a}$. Преобразуя интеграл $V_{\tilde{D}}$ к переменным x^i, получим, очевидно:

$$V_{\tilde{D}} = \int\limits_{\tilde{D}} d\tilde{x}^1 \ldots d\tilde{x}^n = \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n = V_D. \tag{37.7}$$

Далее, для тела D, составленного из (неперекрывающихся) тел D_1 и D_2, объем будет равен сумме объемов этих тел:

$$V_D = V_{D_1} + V_{D_2},$$

так как, очевидно:

$$\int\limits_D dx^1 \ldots dx^n = \int\limits_{D_1} dx^1 \ldots dx^n + \int\limits_{D_2} dx^1 \ldots dx^n. \tag{37.8}$$

Эти и подобные им свойства объемов показывают, что хотя объем у нас — относительный инвариант и не выражается определенным числом, тем не менее он характеризует пространственную протяженность тела независимо от его формы и места расположения подобно численно выраженному объему в обычном пространстве.

Рассмотрим, в частности, *n-мерный параллелепипед*, построенный на n линейно независимых векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, исходящих из данной точки O. Так мы будем называть множество точек M, для которых радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ разлагается по векторам $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами, меняющимися от 0 до 1:

$$\overrightarrow{OM} = t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^n\mathbf{a}_n,$$

где
$$0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 \leqslant t^n \leqslant 1. \tag{37.9}$$

В случае $n=1$
$$\overrightarrow{OM} = t^1 \mathbf{a}_1, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1,$$
и получаемый при этом «одномерный параллелепипед» мы будем называть *отрезком* одномерного аффинного пространства (прямой линии).

В случае $n=2$ мы получаем «двумерный параллелепипед»
$$\overrightarrow{OM} = t^1 \mathbf{a}_1 + t^2 \mathbf{a}_2, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1,$$
который будем называть *параллелограммом* в двумерном аффинном пространстве.

Эти определения, очевидно, вполне согласуются с нашими обычными представлениями об отрезке на прямой, полученном откладыванием вектора $\mathbf{a}_1$ от точки O, и о параллелограмме на плоскости, построенном на векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, отложенных от точки O.

Совершенно аналогично при $n=3$ наше определение параллелепипеда вполне согласуется с обычным.

Отнесем пространство к какой-нибудь координатной системе $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и вычислим интеграл V_D для нашего n-мерного параллелепипеда. При этом всегда можно считать, что параллелепипед построен, исходя из начала O (так как V_D не меняется при параллельном сдвиге тела D).

Обозначим координаты векторов $\mathbf{a}_k$ через a^i_k, так что
$$\mathbf{a}_k = a^i_k \mathbf{e}_i. \tag{37.10}$$

Вычисление интеграла V_D мы для краткости проведем обходным путем. Примем на время $\mathbf{a}_k$ за векторы $\mathbf{e}_{k'}$ нового репера (с прежним началом O). Тогда *в новой координатной системе* коэффициенты $t^1, \ldots, t^n$ будут служить координатами, причем в пределах нашего параллелепипеда они меняются от 0 до 1. Поэтому *в новой координатной системе*
$$V'_D = \int_0^1 \ldots \int_0^1 dt^1 \ldots dt^n = 1. \tag{37.11}$$

Но V_D и V'_D согласно (37.3) связаны соотношением
$$V'_D = |\operatorname{Det} | A^{i'}_i | | \cdot V_D. \tag{37.12}$$

В нашем случае матрица $\| A^i_{i'} \|$, как видно из (37.10), совпадает с матрицей $\| a^i_k \|$, а следовательно, матрица $\| A^{i'}_i \|$ — с ее обратной матрицей, и мы получаем:

$$\mathrm{Det}\,|A_i^{i'}| = \frac{1}{\mathrm{Det}\,|a_k^i|}.$$

Теперь соотношение (37.12) дает (если учесть, что $V'_D = 1$):

$$V_D = |\mathrm{Det}\,|a_k^i||. \qquad (37.13)$$

Итак, относительный инвариант V_D в случае n-мерного параллелепипеда выражается модулем определителя $\mathrm{Det}\,|a_k^i|$, составленного из координат векторов, на которых построен параллелепипед.

Между прочим, сам этот определитель является относительным инвариантом веса —1, так как согласно (35.1) он равен $n!\ a^{12\cdots n}$, где $a^{12\cdots n}$ — координата n-вектора $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n]$.

В частности, если D_0 — параллелепипед, построенный на векторах репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то аналогично (37.11) $V_{D_0} = 1$, так что

$$V_D : V_{D_0} = |\mathrm{Det}\,|a_k^i||. \qquad (37.14)$$

Итак, отношение объемов двух n-мерных параллелепипедов, построенных соответственно на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, равно модулю определителя той матрицы, посредством которой векторы $\mathbf{a}_i$ выражаются через векторы $\mathbf{e}_i$. Этот результат получен в предположении, что векторы $\mathbf{e}_i$ совпадают с векторами репера. Но, в силу того, что отношение двух объемов есть инвариант, наш результат остается верным и в любой координатной системе.

Все сказанное до сих пор об объемах в n-мерном аффинном пространстве полностью переносится и на его m-мерные плоскости, поскольку они также представляют собой аффинные пространства. При этом m-мерные объемы тел D, расположенных на *разных* m-мерных плоскостях, вообще говоря, нельзя сравнивать друг с другом. Действительно, речь идет об относительных инвариантах V_D, меняющихся в зависимости от выбора репера $\{O^*, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, в одном случае — на одной плоскости, в другом случае — на другой. Так как выбор реперов на разных m-мерных плоскостях происходит совершенно независимо, то никаких инвариантных соотношений между значениями V_D на разных плоскостях установить нельзя.

Однако из этого правила имеется исключение. Если речь идет о *параллельных* m-мерных плоскостях, то их можно относить к одному и тому же реперу (если не обращать внимания на положение начала O^*). В самом деле, векторы репера $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, построенного на одной плоскости, можно отложить и на параллельной ей плоскости из какой-нибудь ее точки.

Относя параллельные m-мерные плоскости к одному и тому же (в указанном смысле) *реперу* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, мы можем сравнить значения m-мерных объемов V_D не только для тел D на данной плоскости, но и на различных параллельных ей плоскостях. Отношение двух таких объемов по-прежнему будет инвариантом, и, вообще, все инвариантные соотношения между объемами повторяются и в этом случае по прежним причинам.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть $m=1$; мы рассматриваем связку параллельных прямых; в качестве областей D на этих прямых берем их отрезки (a, b); «одномерные объемы»

$$V_D = \int_a^b dt^1 = b - a \quad (b > a)$$

представляют собой длины этих отрезков, вычисленные при условном выборе направляющего вектора $\mathbf{a}_1$ (общего для всех прямых связки) за единичный вектор. Однако отношения длин отрезков на параллельных прямых будут уже инвариантными, равно как и такие факты, что длина данного отрезка есть сумма длин двух параллельных ему отрезков (если это имеет место при одном выборе вектора $\mathbf{a}$), и т. д.

Пусть $m=2$; мы рассматриваем связку параллельных двумерных плоскостей; двумерные области D берутся на этих плоскостях. Их «двумерные объемы» $V_D = \iint\limits_D dt^1 dt^2$ — это площади, которые получатся, если условно выбрать в качестве единицы измерения площадь параллелограмма, построенного на направляющих векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (общих для всех плоскостей связки). Однако отношения площадей параллельно расположенных плоских фигур будут уже инвариантными, равно как и такие факты, что площадь данной плоской фигуры есть сумма площадей параллельных ей плоских фигур, и т. д.

В заключение мы дадим окончательную геометрическую характеристику простого m-вектора.

Задание простого m-вектора, отличного от нуля, равносильно заданию некоторой m-мерной плоскости (*с точностью до параллельного сдвига*), *с определенной ориентацией и с определенным объемом, указанными на ней.* Это мы будем кратко называть *геометрической характеристикой* m-вектора. Переходим к доказательству нашего утверждения.

Каждый простой m-вектор, не равный нулю, можно (хотя и неоднозначно) представить в виде косого произведения $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$. Если принять $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ за направляющие векторы некоторой m-мерной плоскости, то эта плоскость определяется с точностью до параллельного сдвига, на ней определяется некоторая ориентация (т. е. ориентация репера $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$) и некоторый m-мерный объем, именно, объем параллелепипеда, построенного на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Мы получаем геометрическую характеристику нашего m-вектора. Однако нужно еще показать, что эта характеристика будет одной и той же независимо от того, каким косым произведением представлен данный m-вектор.

Пусть данный m-вектор представлен косым произведением других векторов $\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$:

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0. \tag{37.15}$$

Мы имеем два равных между собой косых произведения, т. е. можно сказать, отличающихся друг от друга численным множителем $\alpha = 1$. Такое положение вещей разбиралось в § 35 (см. (35.18)) и приводило к тому, что $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ служили направляющими векторами одной и той же m-мерной плоскости, а следовательно, могли разлагаться одни по другим. Таким образом, и в нашем случае

$$\mathbf{a}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{a}_i. \tag{37.16}$$

Теперь согласно (35.12)

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \cdot \operatorname{Det} |A^i_{i'}|. \tag{37.17}$$

Сравнивая с (37.15), получаем:

$$\operatorname{Det} |A^i_{i'}| = 1. \tag{37.18}$$

Это показывает, во-первых, что реперы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ определяют на m-мерной плоскости одну и ту же ориентацию (так как $\operatorname{Det} |A^i_{i'}| = 1 > 0$) и, во-вторых, что построенные на них параллелепипеды имеют одинаковый объем. В самом деле, отношение этих объемов согласно (37.14) равно $|\operatorname{Det} |A^i_{i'}||$, т. е. единице.

Итак, геометрическая характеристика данного m-вектора действительно не зависит от способа его записи в виде косого произведения и будет, таким образом, вполне определенной.

Теперь нужно показать, что и обратно, *данной геометрической характеристике* отвечает только один простой m-вектор.

Пусть $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$ и $[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}]$ — два не равных нулю простых m-вектора с *данной* геометрической характеристикой. Поскольку, таким образом, как $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, так и $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ являются направляющими векторами *заданной* (с точностью до параллельного сдвига) m-мерной плоскости, то одни из них разлагаются по другим; мы снова получаем (37.16), а следовательно, и (37.17). Так как ориентация на m-мерной плоскости нам также задана, то $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и

$\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ должны иметь общую ориентацию, и таким образом

$$\operatorname{Det} |A^i_{i'}| > 0. \tag{37.19}$$

Далее, объем в m-мерной плоскости нам также задан, так что объемы параллелепипедов, построенных на $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$, должны быть одинаковыми, т. е. отношение этих объемов равно единице:

$$|\operatorname{Det} |A^i_{i'}|| = 1. \tag{37.20}$$

Сравнивая два последних соотношения, получаем:

$$\operatorname{Det} |A^i_{i'}| = 1,$$

откуда согласно (37.17) следует:

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m],$$

а это мы и хотели показать. Теперь наше утверждение доказано полностью.

§ 38. Тензорные поля

Мы изучали до сих пор отдельные тензоры. Однако эта точка зрения по существу является только подготовительной и достаточна лишь для рассмотрения простейших вопросов. Как правило, геометрические и физические задачи приводят нас к рассмотрению тензорных полей.

Мы говорим, что в n-мерном аффинном пространстве задано поле тензора $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$, если для каждой точки M задан определенный тензор указанного строения

$$a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}(M). \tag{38.1}$$

Тензорное поле может быть задано и не во всем пространстве, а только в некоторой его n-мерной области D (и даже только на некоторой m-мерной поверхности, в частности на линии). Это значит, что точка M в (38.1) пробегает не все пространство, а только его область D (или даже m-мерную поверхность), а для остальных точек тензор $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ не определен. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, подразумевается, что тензорное поле задано в n-мерной области D (в частности, во всем пространстве). Кстати, здесь уместно дать общее определение *n-мерной области D: это такое множество точек, что вместе с каждой точкой x^i_0 к нему принадлежат все точки x^i, для которых $|x^i - x^i_0| < \varepsilon$, если только $\varepsilon > 0$ взято достаточно малым.* Для различных точек x_0 значения ε, вообще говоря, различны.