$\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ должны иметь общую ориентацию, и таким образом

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| > 0. \qquad (37.19)$$

Далее, объем в m-мерной плоскости нам также задан, так что объемы параллелепипедов, построенных на $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a}_{1'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$, должны быть одинаковыми, т. е. отношение этих объемов равно единице:

$$|\,\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|\,| = 1. \qquad (37.20)$$

Сравнивая два последних соотношения, получаем:

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = 1,$$

откуда согласно (37.17) следует:

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m],$$

а это мы и хотели показать. Теперь наше утверждение доказано полностью.

§ 38. Тензорные поля

Мы изучали до сих пор отдельные тензоры. Однако эта точка зрения по существу является только подготовительной и достаточна лишь для рассмотрения простейших вопросов. Как правило, геометрические и физические задачи приводят нас к рассмотрению тензорных полей.

Мы говорим, что в n-мерном аффинном пространстве задано поле тензора $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$, если для каждой точки M задан определенный тензор указанного строения

$$a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k} = a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}(M). \qquad (38.1)$$

Тензорное поле может быть задано и не во всем пространстве, а только в некоторой его n-мерной области D (и даже только на некоторой m-мерной поверхности, в частности на линии). Это значит, что точка M в (38.1) пробегает не все пространство, а только его область D (или даже m-мерную поверхность), а для остальных точек тензор $a^{j_1 \ldots j_l}_{i_1 \ldots i_k}$ не определен. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, подразумевается, что тензорное поле задано в n-мерной области D (в частности, во всем пространстве). Кстати, здесь уместно дать общее определение *n-мерной области D: это такое множество точек, что вместе с каждой точкой x^i_0 к нему принадлежат все точки x^i, для которых $|x^i - x^i_0| < \varepsilon$, если только $\varepsilon > 0$ взято достаточно малым.* Для различных точек x_0 значения ε, вообще говоря, различны.

Нетрудно было бы показать инвариантность этого определения относительно преобразования аффинной координатной системы x^i.

Если пространство отнесено к определенной координатной системе, то (38.1) можно переписать в виде функциональной зависимости

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(x^1, \dots, x^n), \tag{38.2}$$

где $x^1, \dots, x^n$ — координаты точки M. Эта функциональная зависимость предполагается достаточное (для будущих выкладок) число раз непрерывно дифференцируемой.

Геометрическое и физическое значение понятия тензорного поля заключается в том, что соответствующий геометрический объект обычно меняется от точки к точке (как, например, кривизна кривой или поверхности), а физический, кроме того, зависит и от момента времени. Так, например, напряженности электрического и магнитного полей зависят от точки, где они наблюдаются, и от момента времени. В связи с этим эти напряженности задаются в теории относительности тензорным полем в четырехмерном пространстве (выражающем пространственно-временну́ю протяженность материи).

Над тензорными полями мы производим все операции тензорной алгебры, установленные нами для отдельных тензоров. Это не требует особого обоснования, так как мы подразумеваем, что эти операции производятся над тензорами наших полей в каждой точке M по отдельности (а в этом случае каждое тензорное поле представлено отдельным тензором).

Так, например, сложение двух данных тензорных полей $a_{jk}^i(M)$, $b_{jk}^i(M)$ обозначает построение нового тензорного поля

$$c_{jk}^i(M) = a_{jk}^i(M) + b_{jk}^i(M)$$

путем сложения в каждой точке M тех тензоров, которыми в этой точке представлены наши тензорные поля.

То же самое относится и ко всем другим операциям тензорной алгебры. Разумеется, тензорные поля, участвующие в операциях, предполагаются определенными в одной и той же области D, которую и пробегает точка M.

Но для тензорных полей возможна и еще одна инвариантная операция — *абсолютное дифференцирование*, вместе с которой мы переходим из области тензорной алгебры в область тензорного анализа.

Пусть в области D, где определено тензорное поле $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$, проведена кривая, т. е. дано геометрическое место точек $M = M(t)$, или в координатной записи

$$x^i = x^i(t), \tag{38.3}$$

где параметр t пробегает определенный интервал изменения. Функции $x^i(t)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, один раз. Вдоль нашей кривой координаты тензора $a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$ будут являться, как видно из (38.2) и (38.3), сложными функциями параметра t. Вычисляем дифференциалы этих функций

$$da_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}=\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}}{\partial x^i}dx^i. \tag{38.4}$$

В правой части подразумевается суммирование по i, так что написанное неравенство есть просто формула полного дифференциала.

Мы утверждаем, что $da_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$ *образуют тензор того же строения, что и* $a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$; *этот тензор мы будем называть абсолютным дифференциалом тензора* $a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$ *(при данном бесконечно малом смещении по данной кривой).*

Проверка нашего утверждения производится просто. Выпишем закон преобразования координат тензора нашего поля при переходе в новую координатную систему

$$a_{i'_1\ldots i'_k}^{j'_1\ldots j'_l}(M)=A_{j_1}^{j'_1}\ldots A_{i'_1}^{i_1}\ldots a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}(M). \tag{38.5}$$

Конечно, $A_{j_1}^{j'_1}$ и т. д. — величины постоянные, не зависящие от точки M, бегущей по кривой, а следовательно, и от параметра t. Дифференцируя по t, получим:

$$da_{i'_1\ldots i'_k}^{j'_1\ldots j'_l}=A_{j_1}^{j'_1}\ldots A_{i'_1}^{i_1}\ldots da_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}. \tag{38.6}$$

Этим наше утверждение доказано.

Рассмотрим теперь в каждой точке M совокупность частных производных от функций (38.2) по всем их аргументам, причем введем для них обозначения

$$\nabla_i a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}=\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}}{\partial x^i}. \tag{38.7}$$

Мы утверждаем, что $\nabla_i a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$ *образуют тензор с тем же числом верхних индексов и на единицу бо́льшим числом нижних индексов, чем у исходного тензора, причем увеличение происходит за счет индекса дифференцирования* i.

Этот тензор мы будем называть *абсолютной производной* исходного тензора $a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$. Так как абсолютная производная определена в каждой точке M, то она в свою очередь образует тензорное поле.

Проверку нашего утверждения проводим следующим образом. Положение точки M можно определять как старыми координатами x^i, так и новыми координатами $x^{i'}$, а потому члены равенства (38.5) можно рассматривать и как функции от x^i, и как функции от $x^{i'}$. Дифференцируя (38.5) почленно по координате $x^{i'}$, получим:

$$\frac{\partial a^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k}}{\partial x^{i'}} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{i'}} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

В последнем выражении мы использовали правило дифференцирования сложной функции (по i происходит суммирование).

Так как по общим формулам

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'},$$

то

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'}$$

и предыдущий результат можно переписать (пользуясь обозначением (38.7)):

$$\nabla_{i'} a^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots A^i_{i'} \nabla_i a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}. \tag{38.8}$$

Мы видим, что величины $\nabla_i a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ действительно преобразуются по тензорному закону.

Заметим, что абсолютный дифференциал можно брать и в том случае, когда поле тензора задано хотя бы только вдоль той кривой, вдоль которой этот дифференциал вычисляется. Но для вычисления абсолютной производной нужно, чтобы поле тензора было задано в n-мерной области, по крайней мере, в некоторой окрестности данной точки.