Итак, для вырождения метрики необходимо и достаточно обращение в нуль $\operatorname{Det}|g_{ij}|$.

Тем самым условие невырожденности равносильно условию

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| \neq 0. \tag{39.16}$$

Мы можем теперь разюмировать: *внесение в n-мерное аффинное пространство операции скалярного умножения векторов равносильно заданию в нем метрического тензора g_{ij}, удовлетворяющего условиям симметрии* (37.11) *и невырожденности* (39.16) (а в остальном выбранного произвольно).

Заметим, что достаточно потребовать соблюдения условия (39.16) в *одной* координатной системе; из нашего рассуждения видно, что отсюда следует невырожденность скалярного произведения, а тем самым соблюдение условия (39.16) в *любой* координатной системе. Впрочем, это нетрудно проверить и прямой выкладкой. В самом деле, закон преобразования g_{ij} имеет вид

$$g_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}.$$

Если считать номером строки в матрицах g_{ij}, $g_{i'j'}$ первый индекс, в матрице $A^i_{i'}$ — нижний индекс, а в матрице $A^j_{j'}$ — верхний индекс, то можно сказать, что матрица $\|g_{i'j'}\|$ получена умножением матриц $\|A^i_{i'}\|$, $\|g_{ij}\|$, $\|A^j_{j'}\|$ в порядке их записи. Но отсюда следует, что определители матриц также перемножаются, причем определители матриц $\|A^i_{i'}\|$, $\|A^j_{j'}\|$, конечно, равны. В результате

$$\operatorname{Det}|g_{i'j'}| = (\operatorname{Det}|A^i_{i'}|)^2 \cdot \operatorname{Det}|g_{ij}|. \tag{39.17}$$

Другими словами, $\operatorname{Det}|g_{ij}|$ *есть относительный инвариант веса* 2. Ясно, что обращение его в нуль (или, наоборот, неравенство нулю) *в одной координатной системе* влечет тот же самый результат *в любой координатной системе.*

§ 40. Тензорная алгебра в евклидовом пространстве

Все, что было сказано о тензорных операциях в аффинном пространстве, остается, разумеется, верным и для евклидова пространства. При этом появляется, однако, и кое-что новое, а именно, исчезает принципиальная разница между ковариантными и контравариантными индексами и возникает возможность переводить одни в другие.

Составим прежде всего в каждой координатной системе матрицу величин g^{ij}, обратную матрице координат g_{ij} метрического тензора. В силу условия невырожденности обратная матрица существует, а в силу условия симметрии будет симметрической вместе с матрицей g_{ij}.

Мы утверждаем, что величины g^{ij} образуют дважды контравариантный тензор, т. е. преобразуются по закону

$$g^{i'j'} = A^{i'}_i A^{j'}_j g^{ij}. \tag{40.1}$$

Проще всего показать это, обратив постановку вопроса: построим матрицу g^{ij}, обратную матрице g_{ij}, *в одной координатной системе*; затем, переходя к любой другой (штрихованной) координатной системе, преобразуем g^{ij} по закону (40.1) и покажем, что полученная при этом матрица $g^{i'j'}$ будет обратной матрице $g_{i'j'}$. Тот факт, что g^{ij} есть матрица, обратная g_{ij}, мы запишем уравнениями

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k, \tag{40.2}$$

выражающими, что произведение наших матриц дает единичную матрицу. При переходе в новую координатную систему мы учтем, что g_{jk} — координаты дважды ковариантного тензора, g^{ij} мы условились преобразовывать как координаты дважды контравариантного тензора, а значит, у нас записано, что результат свертывания двух этих тензоров по индексу j дает единичный тензор δ^i_k. Соотношения (40.2) имеют, таким образом, инвариантный характер, так что в новой координатной системе получаем снова

$$g^{i'j'}g_{j'k'} = \delta^{i'}_{k'},$$

а это показывает, что матрица $g^{i'j'}$, полученная преобразованием (40.1), действительно оказывается обратной матрице $g_{i'j'}$.

Дважды контравариантный тензор g^{ij} мы тоже будем называть метрическим тензором, но, в отличие от g_{ij}, контравариантным.

Теперь покажем, как в евклидовом пространстве каждый контравариантный индекс можно «переделать» в ковариантный, и обратно. Начнем с одновалентного контравариантного тензора x^i. Путем свертывания с метрическим тензором его можно «переделать» в ковариантный тензор:

$$x_i = g_{ij}x^j. \tag{40.3}$$

Поскольку метрический тензор евклидова пространства задан раз навсегда, то эта операция «*опускания индекса*» у тензора x^i определена однозначно.

Обратно, любой одновалентный ковариантный тензор x_j можно «переделать» в контравариантный путем свертывания с контравариантным метрическим тензором:

$$x^i = g^{ij}x_j. \tag{40.4}$$

Эта операция *«поднятия индекса»* также однозначно определена. С алгебраической точки зрения опускание индекса представляет собой линейное преобразование x^i в x_i при помощи матрицы g_{ij}, а поднятие индекса — преобразование x_i в x^i при помощи матрицы g^{ij}. Так как матрицы g_{ij} и g^{ij} взаимно обратные, то операции опускания и поднятия индекса взаимно уничтожают друг друга. Так, например, сначала «опустив» и затем «подняв» индекс у x^i, мы возвращаемся *к прежнему* контравариантному тензору x^i.

Координаты контравариантного тензора x^i, как мы знаем, всегда можно истолковать как координаты некоторого вектора

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{40.5}$$

Спрашивается, какое отношение к вектору $\mathbf{x}$ имеет тензор x_i, полученный из тензора x^i опусканием индекса. На этот вопрос легко ответить, пользуясь (39.8) и переписав (40.3) в виде

$$x_i = g_{ij}x^j = (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)\,x^j = (\mathbf{e}_i,\ x^j\mathbf{e}_j),$$

т. е. окончательно

$$x_i = \mathbf{x}\mathbf{e}_i. \tag{40.6}$$

Итак, опускание индекса у координат x^i вектора $\mathbf{x}$ приводит нас к скалярным произведениям этого вектора на векторы репера. Эти скалярные произведения мы будем называть ковариантными координатами x_i вектора $\mathbf{x}$.

Очевидно, ковариантные координаты x_i однозначно определяются по вектору $\mathbf{x}$, как и обратно, по ним можно однозначно определить этот вектор, перейдя предварительно к контравариантным координатам x^i поднятием индекса.

По той же схеме (40.3) и (40.4) производятся опускание и поднятие индекса (любого по выбору) у многовалентных тензоров. Единственное, что к этому нужно добавить,— это необходимость изменить нумерацию индексов у тензора в евклидовом пространстве. В самом деле, индексы тензора отличались друг от друга: контравариантные — порядком их записи наверху, а ковариантные — внизу. Но если мы, например, второй верхний индекс опускаем, то нельзя дать общего правила, на какое место его следует ставить внизу (второе место внизу может быть уже занято или внизу может и совсем не быть индексов).

Чтобы избежать связанной с этим неопределенности в обозначениях, мы часто будем *нумеровать места индексов верхних и нижних в совокупности,* так что каждому номеру отвечает лишь один индекс, стоящий или наверху или внизу. Если например, 3-й индекс стоит наверху, то третье место внизу остается «пустым», что отмечается точкой, и наоборот. Например, $a_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot k}$ обозначает тензор, у которого 1-й и 2-й индексы ковариантные, 3-й — контравариантный, 4-й — снова ковариантный. Если 1-й индекс мы захотим «поднять», то для него заготовлено свободное место наверху, и мы получаем:

$$a^{i\cdot k\cdot}_{\cdot j\cdot l} = g^{ip}\, a_{pj\cdot l}^{\cdot\cdot k\cdot}. \qquad (40.7)$$

Аналогично, если мы захотим опустить верхний индекс, то получим:

$$a_{ijkl}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = g_{kp}\, a_{ij\cdot l}^{\cdot\cdot p\cdot}. \qquad (40.8)$$

Отметим важный пример: поднятие одного, например 2-го, индекса у g_{ij} дает единичный тензор:

$$g_{i\cdot}^{\cdot j} = g^{jp} g_{ip} = \delta^j_i, \qquad (40.9)$$

для которого мы сохраняем прежнее обозначение.

Если мы теперь поднимаем и нижний индекс, то получим:

$$g^{ip}\delta^j_p = g^{ij},$$

так как при суммировании уцелеет лишь один член, для которого $p = j$. Итак, поднимая оба индекса у метрического тензора, мы получаем контравариантный метрический тензор.

Еще один пример: пусть аффинор $\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}$ задан посредством тензора a^i_j (§ 27), или, как мы теперь будем писать, $a^i_{\cdot j}$, считая верхний индекс первым, а нижний — вторым. Тогда $y^i = a^i_{\cdot j} x^j$. Опуская индекс i, получаем:

$$y_i = a_{ij} x^j, \quad \text{где} \quad a_{ij} = g_{ip} a^p_{\cdot j}. \qquad (40.10)$$

Таким образом, аффинор $\mathfrak{A}$ можно задать и дважды ковариантным тензором a_{ij}, причем его координаты образуют матрицу преобразования *контравариантных* координат вектора-аргумента в *ковариантные* координаты вектора-функции. В частности, аффинор $\mathfrak{A}$ называется *симметрическим* или *кососимметрическим* в случае симметричности и кососимметричности тензора a_{ij}. Следует подчеркнуть, что эти определения могут быть формулированы лишь в евклидовом пространстве и не имеют никакого смысла в аффинном пространстве, где опускание индексов невозможно. Это относится и к понятию ковариантных координат вектора.

§ 41. Плоскости в n-мерном евклидовом пространстве

Мы понимаем под m-мерной плоскостью в n-мерном евклидовом пространстве то же самое, что и в n-мерном аффинном пространстве (на базе которого евклидово пространство построено). Нам известно, что такая m-мерная плоскость сама является m-мерным аффинным