торого 1-й и 2-й индексы ковариантные, 3-й — контравариантный, 4-й — снова ковариантный. Если 1-й индекс мы захотим «поднять», то для него заготовлено свободное место наверху, и мы получаем:

$$a^{i\cdot k\cdot}_{\cdot j\cdot l} = g^{ip}\, a^{\cdot\cdot k\cdot}_{pj\cdot l}. \tag{40.7}$$

Аналогично, если мы захотим опустить верхний индекс, то получим:

$$a_{ijkl} = g_{kp}\, a^{\cdot\cdot p\cdot}_{ij\cdot l}. \tag{40.8}$$

Отметим важный пример: поднятие одного, например 2-го, индекса у g_{ij} дает единичный тензор:

$$g^{\cdot j}_{i\cdot} = g^{jp} g_{ip} = \delta^j_i, \tag{40.9}$$

для которого мы сохраняем прежнее обозначение.

Если мы теперь поднимаем и нижний индекс, то получим:

$$g^{ip}\delta^j_p = g^{ij},$$

так как при суммировании уцелеет лишь один член, для которого $p = j$. Итак, поднимая оба индекса у метрического тензора, мы получаем контравариантный метрический тензор.

Еще один пример: пусть аффинор $\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}$ задан посредством тензора a^i_j (§ 27), или, как мы теперь будем писать, $a^i_{\cdot j}$, считая верхний индекс первым, а нижний — вторым. Тогда $y^i = a^i_{\cdot j} x^j$. Опуская индекс i, получаем:

$$y_i = a_{ij} x^j, \quad \text{где} \quad a_{ij} = g_{ip} a^p_{\cdot j}. \tag{40.10}$$

Таким образом, аффинор $\mathfrak{A}$ можно задать и дважды ковариантным тензором a_{ij}, причем его координаты образуют матрицу преобразования *контравариантных* координат вектора-аргумента в *ковариантные* координаты вектора-функции. В частности, аффинор $\mathfrak{A}$ называется *симметрическим* или *кососимметрическим* в случае симметричности и кососимметричности тензора a_{ij}. Следует подчеркнуть, что эти определения могут быть формулированы лишь в евклидовом пространстве и не имеют никакого смысла в аффинном пространстве, где опускание индексов невозможно. Это относится и к понятию ковариантных координат вектора.

§ 41. Плоскости в n-мерном евклидовом пространстве

Мы понимаем под m-мерной плоскостью в n-мерном евклидовом пространстве то же самое, что и в n-мерном аффинном пространстве (на базе которого евклидово пространство построено). Нам известно, что такая m-мерная плоскость сама является m-мерным аффинным пространством. Но теперь на ней (как и во всем вмещающем пространстве) определено скалярное произведение $\mathbf{xy}$ для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Казалось бы, можно утверждать, что плоскость евклидова пространства тоже представляет собой евклидово пространство меньшего числа измерений. Однако это не всегда верно. Может случиться, что скалярное произведение на данной m-мерной плоскости *не удовлетворяет условию невырожденности* (хотя во вмещающем пространстве это условие и удовлетворяется). Другими словами, возможно, что на данной плоскости найдется вектор $\mathbf{x} \neq 0$, ортогональный *ко всем векторам этой плоскости,* но, конечно, не ко всем векторам пространства. В этом случае метрику на плоскости мы будем называть *вырожденной,* а соответствующую плоскость с такой метрикой будем называть *изотропной.*

Изотропную плоскость мы за евклидово пространство не признаем ввиду того, что в определение последнего входит условие невырожденности; здесь же оно нарушено.

Очевидно, все остальные свойства скалярного произведения в n-мерном пространстве имеют место и на любой плоскости этого пространства.

Забегая вперед, следует сказать, что изотропные плоскости представляют собой исключение; как правило, плоскости являются неизотропными, т. е. несут на себе невырожденную метрику, и, следовательно, по своей геометрии являются евклидовыми пространствами соответствующего числа измерений. Кроме того, в случае *собственно евклидова* пространства вообще не существует изотропных плоскостей; в частности, их нет в обычном пространстве, в связи с чем нам трудно дается наглядное представление об этих плоскостях.

Чтобы показать, что в собственно евклидовом пространстве все плоскости неизотропные, рассмотрим какую-нибудь m-мерную плоскость; на ней, как и во всем пространстве, соблюдается условие (39.7):

$$\mathbf{x}^2 > 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{x} \neq 0. \tag{41.1}$$

А в этом случае на плоскости невозможен вектор $\mathbf{x} \neq 0$, ортогональный ко всем векторам плоскости, так как такой вектор был бы ортогонален, в частности, и к себе и мы в противоречие с условием (41.1) имели бы

$$\mathbf{x}^2 = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq 0. \tag{41.2}$$

Вектор $\mathbf{x} \neq 0$, для которого $\mathbf{x}^2 = 0$ и который, следовательно, ортогонален к самому себе, называется *изотропным.* В собственно евклидовых пространствах такие векторы, как мы только что сейчас видели, невозможны, зато в псевдоевклидовых и комплексных евклидовых пространствах они встречаются обязательно.

Пусть m-мерная плоскость задана начальной точкой O^* и направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Принимая эти векторы за векторы аффинного репера в плоскости, составим их скалярные произведения:

$$g^*_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad (\alpha, \ \beta = 1, \ 2, \ \ldots, \ m). \tag{41.3}$$

В соответствии с (39.8) $g^*_{\alpha\beta}$ можно принять за координаты метрического тензора на нашей плоскости, если только соблюдается условие невырожденности (39.16):

$$\operatorname{Det} | g^*_{\alpha\beta} | \neq 0. \tag{41.4}$$

В этом случае плоскость *неизотропная* и несет на себе евклидову геометрию с метрическим тензором (41.3). Если же оказывается

$$\operatorname{Det} | g^*_{\alpha\beta} | = 0, \tag{41.5}$$

то плоскость будет *изотропной* и несет на себе вырожденную метрику.

Пусть теперь у нас имеется прямая линия с направляющим вектором $\mathbf{a}(a^1, \ldots, a^n) \neq 0$. Рассмотрим совокупность всех векторов $\mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n)$, ортогональных к данной прямой, т. е. ортогональных ко всем ее векторам. Очевидно, для этого достаточно, чтобы векторы $\mathbf{x}$ были ортогональны к $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{ax} = 0, \tag{41.6}$$

т. е.

$$g_{ij} a^i x^j = 0.$$

Обозначая через a_j ковариантные координаты вектора $\mathbf{a}$ и пользуясь (40.3) (в применении к a^i), можно записать:

$$a_j x^j = 0. \tag{41.7}$$

Таким образом, координаты x^j векторов $\mathbf{x}$ должны удовлетворять линейному уравнению (41.7). Откладывая векторы $\mathbf{x}$ от начала O, мы видим, что концы их (обладающие теми же координатами x^j) образуют *гиперплоскость* с уравнением (41.7), проходящую через начало O. *Все векторы этой гиперплоскости, очевидно, ортогональны ко всем векторам данной прямой; такую гиперплоскость мы будем называть ортогональной к данной прямой.*

Итак, через точку O (и совершенно так же через любую заданную точку) всегда можно провести гиперплоскость, ортогональную к данной прямой, и притом единственным образом. При этом нужно различать *основной случай*, когда данная прямая *неизотропная*, т. е. $\mathbf{a}^2 \neq 0$, и *исключительный случай*, когда она *изотропная*, т. е. $\mathbf{a}^2 = 0$. (Мы использовали условия (41.4) и (41.5), записанные для «одномерной плоскости», $m=1$.) Будем для простоты рассматривать прямую и ортогональную к ней гиперплоскость, проходящие через общую точку O.

В первом случае прямая линия не лежит в ортогональной к ней гиперплоскости, что, конечно, представляется нам само собой разумеющимся. Действительно, вектор $\mathbf{a}$ не может лежать в гиперплоскости, построенной согласно (41.6), так как иначе он был бы ортогонален самому себе, а это невозможно в силу $\mathbf{a}^2 \neq 0$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}$ будет линейно независимым от $n-1$ направляющих векторов гиперплоскости $b_1, \ldots, b_{n-1}$, а следовательно, все эти векторы в совокупности

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \tag{41.8}$$

можно принять за векторы аффинного репера в пространстве. Далее, наша гиперплоскость сама будет неизотропной: если допустить противное, то в гиперплоскости найдется вектор $\mathbf{x} \neq 0$, ортогональный ко всем векторам гиперплоскости, в частности, к направляющим векторам $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$. Но, кроме того, вектор $\mathbf{x}$, как лежащий в нашей гиперплоскости, будет ортогонален и к $\mathbf{a}$, т. е. ко всем векторам репера (41.8), а тем самым и ко всем векторам пространства. Но это невозможно в силу условия невырожденности.

Итак, *если данная прямая неизотропная, то ортогональная ей гиперплоскость тоже неизотропная и не содержит данной прямой (даже при наличии у них общей точки). При этом всегда можно построить репер* (41.8), *один вектор которого принадлежит прямой, а остальные $n-1$ векторов ему ортогональны и принадлежат гиперплоскости.*

Во втором случае, когда данная прямая изотропная, ее направляющий вектор $\mathbf{a}$ входит в число векторов $\mathbf{x}$, к нему ортогональных (в силу $\mathbf{a}^2=0$), и принадлежит тем самым ортогональной гиперплоскости. Поэтому, если изотропная прямая и ортогональная к ней гиперплоскость проведены через общую точку O, то вместе с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и сама прямая принадлежит гиперплоскости. Кроме того, гиперплоскость тоже оказывается изотропной, так как содержит вектор $\mathbf{a}$, ортогональный ко всем ее векторам.

Итак, если данная прямая изотропная, то ортогональная ей гиперплоскость тоже изотропная и при наличии общей точки проходит через данную прямую.

Эта картина резко противоречит нашим привычным представлениям, воспитанным на обычной (т. е. трехмерной, собственно евклидовой) геометрии. Мы получаем здесь первое серьезное предупреждение о непригодности наших привычных представлений в области псевдоевклидовой (и комплексной евклидовой) геометрии. Правда, это относится лишь к метрическим свойствам пространства; в области аффинных свойств разницы нет, так как все типы евклидовых пространств строятся на базе одного и того же (вещественного или комплексного) аффинного пространства.

То, что было сейчас сделано для прямой линии («одномерной плоскости»), нетрудно повторить и для любой m-мерной плоскости. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ — направляющие векторы этой плоскости. Рассмотрим совокупность всех векторов $\mathbf{x}$, ортогональных к нашей плоскости, т. е. ортогональных ко всем ее векторам. Но для этого достаточно, чтобы векторы $\mathbf{x}$ были ортогональны к ее направляющим векторам, т. е.

$$\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 0, \ \mathbf{a}_2\mathbf{x} = 0, \ \ldots, \ \mathbf{a}_m\mathbf{x} = 0. \tag{41.9}$$

Запишем эти соотношения аналогично (41.7):

$$a_{(1)j}x^j = 0, \quad a_{(2)j}x^j = 0, \ \ldots, \ a_{(m)j}x^j = 0, \tag{41.10}$$

где индексы в скобках обозначают номера соответствующих векторов. Уравнения (41.10) линейно независимы, так как в противном случае имелась бы линейная зависимость между векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, ковариантные координаты которых служат коэффициентами уравнений, а это невозможно, так как направляющие векторы всегда берутся линейно независимыми. Откладывая векторы $\mathbf{x}$ от начала O, мы видим, что концы их (обладающие теми же координатами x^j) образуют $n-m$-мерную плоскость. В самом деле, m линейно независимых уравнений (41.10) всегда можно переписать в виде, разрешенном относительно m переменных, а такая система уравнений определяет $n-m$-мерную плоскость (§ 33).

Каждый вектор этой $n-m$-мерной плоскости ортогонален к каждому вектору у исходной m-мерной плоскости; такие плоскости мы будем называть *ортогональными между собой.*

Итак, через начало O (как и вообще через любую точку) проходит одна и только одна $n-m$-мерная плоскость, ортогональная к данной m-мерной плоскости. Будем считать для простоты, что обе эти плоскости имеют общую точку O.

Здесь имеются две возможности. Если *m-мерная плоскость — неизотропная, то $n-m$-мерная плоскость — тоже неизотропная; между собой эти плоскости не пересекаются*), и их направляющие векторы*

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m & (\text{для } m\text{-мерной плоскости}),\\ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m} & (\text{для } n-m\text{-мерной плоскости})\end{array}\right\} \tag{41.11}$$

можно принять в совокупности за векторы пространственного репера.

Если же m-мерная плоскость — изотропная, то $n-m$-мерная плоскость тоже изотропная; эти плоскости пересекаются между

*) То есть не имеют общих точек кроме O.

собой, их направляющие векторы (в совокупности) линейно зависимы и, значит, не могут служить векторами пространственного репера.

Для доказательства этих утверждений разберем две возможности: случай непересечения и случай пересечения наших плоскостей.

В случае непересечения векторы (41.11) линейно независимы. В самом деле, если предположить линейную зависимость

$$\alpha^1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha^m\mathbf{a}_m + \beta^1\mathbf{b}_1 + \ldots + \beta^{n-m}\mathbf{b}_{n-m} = 0, \qquad (41.12)$$

то из нее вытекает существование не равного нулю вектора

$$\alpha^1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha^m\mathbf{a}_m = -\beta^1\mathbf{b}_1 - \ldots - \beta^{n-m}\mathbf{b}_{n-m}, \qquad (41.13)$$

общего для обеих плоскостей. Отсюда вытекает существование и общей прямой, а именно проходящей через общую точку O в направлении этого общего вектора, что противоречит непересечению наших плоскостей. Следовательно, векторы (41.11) линейно независимы, и их можно принять за векторы пространственного репера. Запишем для этого репера условие невырожденности (39.16):

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| = \operatorname{Det}|\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j| \neq 0. \qquad (41.14)$$

В нашем случае

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m;\ \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n = \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}, \qquad (41.15)$$

причем векторы $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}_j$ ортогональны между собой (как принадлежащие ортогональным плоскостям). Матрица $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ имеет вид

$$\left\|\begin{array}{c|c} \mathbf{a}_p\mathbf{a}_q & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{b}_r\mathbf{b}_s \end{array}\right\|, \qquad (41.16)$$

а следовательно,

$$\operatorname{Det}|\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j| = \operatorname{Det}|\mathbf{a}_p\mathbf{a}_q| \cdot \operatorname{Det}|\mathbf{b}_r\mathbf{b}_s|, \qquad (41.17)$$

и условие невырожденности (41.14) принимает вид

$$\operatorname{Det}|\mathbf{a}_p\mathbf{a}_q| \cdot \operatorname{Det}|\mathbf{b}_r\mathbf{b}_s| \neq 0. \qquad (41.18)$$

Тем самым отличен от нуля и каждый из множителей, а значит (согласно (41.4)), обе плоскости неизотропные.

В случае пересечения, т. е. в случае существования у наших плоскостей, по крайней мере, одной общей прямой, ее направляющий вектор $\mathbf{c}$ также будет для них общим. Поэтому $\mathbf{c}$ можно разложить как по $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, так и по $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}$. Приравнивая эти разложения, получаем линейную зависимость между направляющими векторами обеих плоскостей в совокупности. Далее, так как вектор $\mathbf{c}$ принадлежит m-мерной плоскости, то он ортогонален к $n-m$-мерной плоскости, и наоборот, так как он принадлежит $n-m$-мерной плоскости, то ортогонален к m-мерной.

Итак, **c** принадлежит каждой из двух плоскостей и в то же время к ней ортогонален; отсюда вытекает, что каждая из плоскостей — изотропная.

В итоге из проведенного исследования случаев непересечения и пересечения видно, что первый имеет место тогда и только тогда, когда исходная m-мерная плоскость неизотропная, а второй — когда она изотропная.

Этим наши утверждения доказаны.

§ 42. Ортонормированный репер

В случае евклидова пространства уже не все аффинные реперы равносильны по своим геометрическим свойствам, как это было в аффинном пространстве. Среди них можно выделить теперь геометрически наиболее простые, так называемые *ортонормированные* реперы, которые в случае обычного пространства соответствуют прямоугольным декартовым координатам.

Нам понадобится следующая тривиальная лемма: *в евклидовом пространстве не могут быть изотропными все векторы,* т. е. не может быть, чтобы $\mathbf{x}^2=0$ при любом $\mathbf{x}$. Действительно, если это допустить, то, в частности, $\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right)^2=0$, $\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\right)^2=0$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Почленно вычитая из первого равенства второе, получим $\mathbf{xy}=0$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Оказывается, таким образом, что любой вектор ортогонален ко всем векторам, что противоречит условию невырожденности.

Мы начнем со случая n-мерного комплексного евклидова пространства R_n^+. В силу леммы всегда можно найти неизотропный вектор $\mathbf{x}$, так что $\mathbf{x}^2\neq 0$. Нормируем вектор $\mathbf{x}$, т. е. поделим его на его длину $\sqrt{\mathbf{x}^2}$. Это будет, вообще говоря, комплексное число, что нас не смущает, так как мы находимся в комплексном пространстве и имеем возможность умножать и делить на комплексные числа. Обозначим полученный вектор через $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}. \tag{42.1}$$

Очевидно,

$$\mathbf{e}_1^2=\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^2}=1, \tag{42.2}$$

т. е. скалярный квадрат вектора $\mathbf{e}_1$ равен единице. Такие векторы мы будем называть *единичными*.