надлежит m-мерной плоскости, то он ортогонален к $n-m$-мерной плоскости, и наоборот, так как он принадлежит $n-m$-мерной плоскости, то ортогонален к m-мерной.

Итак, $\mathbf{c}$ принадлежит каждой из двух плоскостей и в то же время к ней ортогонален; отсюда вытекает, что каждая из плоскостей — изотропная.

В итоге из проведенного исследования случаев непересечения и пересечения видно, что первый имеет место тогда и только тогда, когда исходная m-мерная плоскость неизотропная, а второй — когда она изотропная.

Этим наши утверждения доказаны.

§ 42. Ортонормированный репер

В случае евклидова пространства уже не все аффинные реперы равносильны по своим геометрическим свойствам, как это было в аффинном пространстве. Среди них можно выделить теперь геометрически наиболее простые, так называемые *ортонормированные* реперы, которые в случае обычного пространства соответствуют прямоугольным декартовым координатам.

Нам понадобится следующая тривиальная лемма: *в евклидовом пространстве не могут быть изотропными все векторы,* т. е. не может быть, чтобы $\mathbf{x}^2=0$ при любом $\mathbf{x}$. Действительно, если это допустить, то, в частности, $\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right)^2=0$, $\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\right)^2=0$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Почленно вычитая из первого равенства второе, получим $\mathbf{xy}=0$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Оказывается, таким образом, что любой вектор ортогонален ко всем векторам, что противоречит условию невырожденности.

Мы начнем со случая n-мерного комплексного евклидова пространства R_n^+. В силу леммы всегда можно найти неизотропный вектор $\mathbf{x}$, так что $\mathbf{x}^2 \neq 0$. Нормируем вектор $\mathbf{x}$, т. е. поделим его на его длину $\sqrt{\mathbf{x}^2}$. Это будет, вообще говоря, комплексное число, что нас не смущает, так как мы находимся в комплексном пространстве и имеем возможность умножать и делить на комплексные числа. Обозначим полученный вектор через $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}. \tag{42.1}$$

Очевидно,

$$\mathbf{e}_1^2=\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^2}=1, \tag{42.2}$$

т. е. скалярный квадрат вектора $\mathbf{e}_1$ равен единице. Такие векторы мы будем называть *единичными*.

Построим теперь гиперплоскость R_{n-1}^{+}, ортогональную к единичному вектору $\mathbf{e}_1$ и проходящую через фиксированную точку O. Гиперплоскость R_{n-1}^{+}, как ортогональная к неизотропному вектору $\mathbf{e}_1$, сама будет неизотропной (§ 41) и несет на себе $n-1$-мерную (тоже комплексную) евклидову геометрию. Поэтому на гиперплоскости R_{n-1}^{+} можно повторить наше построение, выбирая как-либо неизотропный вектор $\mathbf{y}$, нормируя его и получая второй единичный вектор $\mathbf{e}_2$. Обозначим далее R_{n-2}^{+} гиперплоскость в R_{n-1}^{+}, ортогональную к $\mathbf{e}_2$ и проходящую через O. Гиперплоскость R_{n-2}^{+} в R_{n-1}^{+}, ортогональная к неизотропному вектору $\mathbf{e}_2$, сама будет неизотропной и несет на себе $n-2$-мерную комплексную евклидову геометрию. Следовательно, на ней можно еще раз повторить то же самое, построив единичный вектор $\mathbf{e}_3$ и ортогональную к нему и проходящую через O гиперплоскость R_{n-3}^{+} и т. д. Процесс заканчивается на «одномерной плоскости» R_1^{+}, на которой мы берем какой-либо вектор $\mathbf{w}$ и, нормируя его, получаем единичный вектор $\mathbf{e}_n$. В итоге получаем последовательность вложенных друг в друга плоскостей убывающего числа измерений (начиная с самого пространства):

$$R_n^{+} \supset R_{n-1}^{+} \supset \ldots \supset R_2^{+} \supset R_1^{+} \tag{42.3}$$

и последовательность единичных векторов:

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-1},\ \mathbf{e}_n. \tag{42.4}$$

При этом, как видно из построения, i-й вектор $\mathbf{e}_i$ принадлежит R_{n-i+1}^{+} и ортогонален к R_{n-i}^{+}. Тем самым $\mathbf{e}_i$ ортогонален и ко всем последующим векторам $\mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$, так как они принадлежат R_{n-i}^{+}, а так как i можно давать значения $1, 2, \ldots, n$, то ясно, что все единичные векторы попарно ортогональны:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j),$$

кроме того,

$$\mathbf{e}_i^2 = 1.$$

Эти формулы можно объединить:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \text{где } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{42.5}$$

Векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ будут линейно независимыми, что следует из способа их построения. Впрочем, это легко обнаружить и непосредственно: если допустить линейную зависимость

$$\alpha^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha^n\mathbf{e}_n = 0,$$

то, умножая левую часть скалярно на $\mathbf{e}_1$, получим (в силу (42.5)):

$$\alpha_1 = 0.$$

Совершенно аналогично убедимся в исчезновении и всех других коэффициентов, т. е. предполагаемая линейная зависимость оказалась тождеством и, следовательно, не существует.

Мы можем принять теперь n единичных и взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ за векторы некоторого репера $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Такой репер мы будем называть *ортонормированным*, а соответствующую ему координатную систему — *ортонормированной*. Векторы ортонормированного репера мы будем называть *ортами*.

В ортонормированной координатной системе происходит большое упрощение основных формул. Координаты метрического тензора приобретают вид

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{42.6}$$

Другими словами, матрица g_{ij} оказывается единичной; обратная ей матрица g^{ij} поэтому тоже будет единичной

$$g^{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{42.7}$$

Исчезает разница между контравариантными и ковариантными координатами вектора; действительно,

$$x_i = g_{ij}x^j = x^i, \tag{42.8}$$

так как в процессе суммирования отличным от нуля окажется лишь член, где $j = i$, причем $g_{ii} = 1$. На этом основании в ортонормированной системе мы будем пользоваться лишь одной записью координат вектора, именно x_i.

Скалярное произведение в координатной записи примет вид

$$\mathbf{xy} = g_{ij}x^iy^j = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n,$$

так как в сумме сохранятся лишь члены, где $i = j$, причем $g_{ii} = 1$. В частности, скалярный квадрат запишется:

$$\mathbf{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Пользуясь (42.8), запишем окончательно:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \tag{42.9}$$

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{42.10}$$

Расстояние между точками A и B мы определяли по формуле (39.5). Если x_i — координаты точки A, а x'_i — координаты точки B, то вектор $\overrightarrow{AB}$ (как разность радиусов-векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$) имеет координаты $x_i' - x_i$, так что

$$\overrightarrow{AB}^2 = (x_1' - x_1)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2, \tag{42.11}$$

и следовательно,

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2}. \tag{42.12}$$

Формулы эти обнаруживают близкое родство с формулами обычной векторной алгебры:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \tag{42.13}$$

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \tag{42.14}$$

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2} \tag{42.15}$$

и даже совпадают с ними в случае $n = 3$. Однако нужно помнить, что в обычном пространстве координаты вещественные, а у нас сейчас — комплексные.

Займемся теперь ортонормированным репером в вещественном евклидовом пространстве R_n. Здесь мы также начинаем с выбора неизотропного вектора $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}^2 \neq 0$), всегда существующего согласно лемме. Однако мы не всегда можем пронормировать его согласно (42.1):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}. \tag{42.16}$$

Это законно, если $\mathbf{x}^2 > 0$, причем, как и прежде, получаем:

$$\mathbf{e}_1^2 = 1. \tag{42.17}$$

Если же $\mathbf{x}^2 < 0$, то знаменатель окажется чисто мнимым, и полученное выражение не имеет смысла, так как умножение вектора на число в вещественном пространстве определено лишь для вещественных чисел. Поэтому в этом случае мы проведем нормирование вектора $\mathbf{x}$ иначе:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{-\mathbf{x}^2}}. \tag{42.18}$$

Теперь под знаком корня стоит положительная величина, делитель вещественный, и операция деления является законной. Полученный вектор, как непосредственно проверяется, обладает свойством

$$\mathbf{e}_1^2 = -1. \tag{42.19}$$

Векторы со скалярным квадратом -1 *мы будем называть мнимоединичными.* Не следует думать, что такие векторы сами являются в каком-то смысле мнимыми; это вещественные векторы вещественного псевдоевклидова пространства, обладающие тем не менее мнимой длиной $\sqrt{-1} = i$.

Построив единичный или мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_1$, мы проводим через фиксированную точку O ортогональную к нему гиперплоскость R_{n-1}. Эта гиперплоскость, как ортогональная к неизотропному вектору, сама будет неизотропной и несет на себе евклидову метрику $n-1$ измерений. Поэтому на ней снова можно найти единичный или мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_2$ и т. д. Очевидно, все построение, проведенное для комплексного случая, повторяется и для вещественного с той только разницей, что нормировка каждого из векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ происходит в одном из двух вариантов (42.16), (42.18). В результате мы получаем *ортонормированный репер* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$; так мы будем называть репер, в котором

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j), \qquad \mathbf{e}_i^2 = \pm 1, \tag{42.20}$$

т. е. векторы которого, вообще говоря, частью единичные, частью мнимоединичные и все ортогональны между собой. Такие векторы мы будем называть *ортами*. Занумеруем их так, чтобы сначала шли мнимоединичные

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \ldots = \mathbf{e}_k^2 = -1, \tag{42.21}$$

а затем единичные

$$\mathbf{e}_{k+1}^2 = \mathbf{e}_{k+2}^2 = \ldots = \mathbf{e}_n^2 = 1. \tag{42.22}$$

Число мнимоединичных векторов k может принимать значения 0, 1, 2, ..., n. Соответственно метрический тензор $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ в ортонормированной координатной системе примет вид

$$\left.\begin{array}{l} g_{ij} = 0 \quad (i \neq j); \quad g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{kk} = -1; \\ g_{k+1,\,k+1} = \ldots = g_{nn} = 1. \end{array}\right\} \tag{42.23}$$

Связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора

$$x_i = g_{ij}x^j$$

теперь перепишется в виде

$$x_i = -x^i \,(i = 1, 2, \ldots, k), \; x_i = x^i \,(i = k+1, \ldots, n), \tag{42.24}$$

так что разница между контравариантными и ковариантными координатами вектора хотя, вообще говоря, и не исчезает, но становится мало значительной.

Скалярное произведение и скалярный квадрат в координатной записи теперь примут вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= g_{ij}x^iy^j = -x^1y^1 - \ldots - x^ky^k + x^{k+1}y^{k+1} + \ldots + x^ny^n, \\ \mathbf{x}^2 &= g_{ij}x^ix^j = -(x^1)^2 - \ldots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2. \end{aligned}\right\} \quad (42.25)$$

Пользуясь зависимостями (42.24), эти формулы можно переписать совершенно в таком же виде для ковариантных координат:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= -x_1y_1 - \ldots - x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} + \ldots + x_ny_n, \\ \mathbf{x}^2 &= -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2. \end{aligned}\right\} \quad (42.26)$$

Инвариантную квадратичную форму $g_{ij}x^ix^j$, выражающую скалярный квадрат вектора через его координаты, мы будем называть *метрической квадратичной формой*.

Мы видим, что в ортонормированной координатной системе метрическая квадратичная форма $g_{ij}x^ix^j$ приводится к каноническому виду суммы-разности квадратов переменных. Верно и обратное: из (42.25) следуют, очевидно, условия (42.23), а отсюда и условия (42.20), так что метрическая квадратичная форма приводится к каноническому виду только в ортонормированных координатах.

Покажем теперь, что при любом выборе ортонормированного репера в данном пространстве число k его мнимоединичных ортов всегда одно и то же. В самом деле, допустим, что мы построили два ортонормированных репера $(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $(O', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_l, \mathbf{e}'_{l+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, причем в первом мнимоединичные орты — это первые k векторов, а во втором — первые l векторов.

Допустим, например, что $l > k$, и покажем, что это приводит нас к противоречию. В самом деле, рассмотрим в совокупности единичные орты $\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ первого репера и мнимоединичные орты $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_l$ второго репера. Так как их число $> n$,

$$(n-k) + l > n,$$

то между ними обязательно должна иметь место линейная зависимость. Ее мы запишем, перенеся в одну часть члены с мнимоединичными, а в другую — с единичными ортами:

$$\alpha_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + \alpha_l\mathbf{e}'_l = \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n. \quad (42.27)$$

Это равенство возводим почленно в скалярный квадрат. Учитывая, что $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j = 0\ (i \neq j)$ и $\mathbf{e}'^2_1 = \ldots = \mathbf{e}'^2_l = -1$, а также, что $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0\ (i \neq j)$ и $\mathbf{e}^2_{k+1} = \ldots = \mathbf{e}^2_n = 1$, получим:

$$-\alpha_1^2 - \ldots - \alpha_l^2 = \beta_{k+1}^2 + \ldots + \beta_n^2.$$

Ясно, что это равенство может иметь место только при $\alpha_1 = \ldots \ldots = \alpha_l = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$ (мы находимся в вещественном евклидовом пространстве и в соответствии с общим соглашением все рассматриваемые численные величины должны быть тоже вещественными). Но тогда вопреки нашему предположению оказывается, что (42.27) есть тождество, а не линейная зависимость между рассматриваемыми векторами. Мы получили искомое противоречие.

Итак, число k мнимоединичных ортов ортонормированного репера в вещественном евклидовом пространстве, как, следовательно, и число $n-k$ его единичных ортов, не зависит от выбора этого репера. Число k, которое представляет собой важную характеристику евклидова пространства, мы будем называть *индексом евклидова пространства.*

С алгебраической точки зрения наш результат представляет собой «*закон инерции*» для вещественной квадратичной формы: при любом способе приведения ее к каноническому виду число как отрицательных, так и положительных квадратов остается без изменения.

§ 43. Собственно евклидовы пространства

Мы определили *собственно евклидовы* пространства как такие вещественные евклидовы пространства, в которых для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$

$$\mathbf{x}^2 > 0. \tag{43.1}$$

Построение ортонормированного репера в этом случае можно провести проще, чем в случае псевдоевклидова или комплексного евклидова пространства. Дело в том, что в собственно евклидовом пространстве, как мы знаем, все плоскости и все векторы, отличные от нуля, — неизотропные. Поэтому в процессе построения нет надобности в предосторожностях, обеспечивающих неизотропный характер векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ..., $\mathbf{w}$, и в ссылках на результаты § 41 (именно, что гиперплоскость, ортогональная к неизотропному вектору, сама неизотропная).

Далее, среди векторов репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ не может быть мнимоединичных (в силу (43.1)), так что индекс $k=0$, и все векторы $\mathbf{e}_i$ — единичные:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \ldots = \mathbf{e}_n^2 = 1. \tag{43.2}$$

Формулы (42.6) принимают вид

$$g_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad g_{ii} = 1. \tag{43.3}$$