Ясно, что это равенство может иметь место только при $\alpha_1 = \ldots \ldots = \alpha_l = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$ (мы находимся в вещественном евклидовом пространстве и в соответствии с общим соглашением все рассматриваемые численные величины должны быть тоже вещественными). Но тогда вопреки нашему предположению оказывается, что (42.27) есть тождество, а не линейная зависимость между рассматриваемыми векторами. Мы получили искомое противоречие.

Итак, число k мнимоединичных ортов ортонормированного репера в вещественном евклидовом пространстве, как, следовательно, и число $n-k$ его единичных ортов, не зависит от выбора этого репера. Число k, которое представляет собой важную характеристику евклидова пространства, мы будем называть *индексом евклидова пространства.*

С алгебраической точки зрения наш результат представляет собой «*закон инерции*» для вещественной квадратичной формы: при любом способе приведения ее к каноническому виду число как отрицательных, так и положительных квадратов остается без изменения.

§ 43. Собственно евклидовы пространства

Мы определили *собственно евклидовы* пространства как такие вещественные евклидовы пространства, в которых для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$

$$\mathbf{x}^2 > 0. \tag{43.1}$$

Построение ортонормированного репера в этом случае можно провести проще, чем в случае псевдоевклидова или комплексного евклидова пространства. Дело в том, что в собственно евклидовом пространстве, как мы знаем, все плоскости и все векторы, отличные от нуля,— неизотропные. Поэтому в процессе построения нет надобности в предосторожностях, обеспечивающих неизотропный характер векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ..., $\mathbf{w}$, и в ссылках на результаты § 41 (именно, что гиперплоскость, ортогональная к неизотропному вектору, сама неизотропная).

Далее, среди векторов репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ не может быть мнимоединичных (в силу (43.1)), так что индекс $k=0$, и все векторы $\mathbf{e}_i$ — единичные:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \ldots = \mathbf{e}_n^2 = 1. \tag{43.2}$$

Формулы (42.6) принимают вид

$$g_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad g_{ii} = 1. \tag{43.3}$$

Связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора (42.24) теперь принимает вид (учитывая, что $k=0$)

$$x_i = x^i, \tag{43.4}$$

т. е. те и другие координаты просто совпадают. Равенства (42.26) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n, \\ \mathbf{x}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2. \end{aligned}\right\} \tag{43.5}$$

Таким образом, в ортонормированной координатной системе в собственно евклидовом пространстве мы получаем те же по внешнему виду формулы, что и в комплексном евклидовом пространстве. Не нужно забывать при этом, конечно, что сейчас у нас координаты точек и векторов принимают всевозможные вещественные значения, в то время как тогда они принимали всевозможные комплексные значения.

В частности, расстояние между двумя точками A, B будет выражаться (в результате совершенно аналогичного вывода) формулой (42.12):

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2}. \tag{43.6}$$

Ясно, что у нас расстояние AB будет всегда вещественным, в то время как в формуле (42.12) оно, как правило, было комплексным.

Особо рассмотрим случай трехмерного собственно евклидова пространства, $n=3$. Формулы (43.5), (43.6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \\ \mathbf{x}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ AB &= \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{43.7}$$

Эти формулы уже буквально повторяют формулы векторной алгебры обычного пространства. В связи с этим нетрудно обнаружить совпадение трехмерного собственно евклидова пространства с нашим обычным пространством, точнее, их изоморфизм. Этим мы хотим сказать следующее. Отобразим построенное нами трехмерное собственно евклидово пространство на обычное пространство взаимно однозначно, а именно так, чтобы каждая точка первого пространства с координатами x_1, x_2, x_3 в ортонормированной координатной системе отобразилась в точку второго пространства с теми же координатами x_1, x_2, x_3 в прямоугольной декартовой системе. Очевидно, при этом отображении сохраняются все свойства точек и векторов трехмерного собственно евклидова пространства (в том числе и метрические), так как они в ортонормированной координатной системе выражаются совершенно так же, как соответствующие свойства точек и векторов обычного пространства в прямоугольной декартовой системе (в частности, одинаково записывается расстояние между двумя точками). Проверка этого совершенно тривиальна. Единственный вопрос, который мог бы возникнуть, — это не имеется ли у обычного пространства еще таких свойств, которые отсутствуют у трехмерного собственно евклидова пространства. Грубо говоря, этого не может быть потому, что в конечном счете все свойства обычного пространства определяются измерением расстояний между точками по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2},$$

а эта формула совпадает с аналогичной формулой (43.7) для трехмерного собственно евклидова пространства.

Однако точная проверка потребовала бы и точного определения того, что мы понимаем под свойствами обычного пространства.

Поясним, что до сих пор мы пользовались понятием «обычного пространства», имея в виду то пространство, которое изучается элементарными средствами в школьном курсе, затем средствами аналитической и дифференциальной геометрии в высшей школе и которое каждому знакомо, если и не в смысле строгого обоснования, то во всяком случае по основным свойствам. Между тем сейчас мы затронули вопрос, который для точного ответа потребовал бы и точного обоснования геометрии обычного пространства посредством той или иной ее аксиоматики. Между прочим, одной из таких аксиоматик может служить и наша аксиоматика трехмерного собственно евклидова пространства.

Вернемся к n-мерному случаю. Мы обнаружили, что *для собственно евклидова пространства индекс k равен* 0. Конечно, верно и обратное: *евклидово пространство индекса $k = 0$ будет собственно евклидовым.* В самом деле, $k = 0$ означает, что все векторы ортонормированного репера — единичные и, следовательно, имеют место формулы (43.2) — (43.5). Но согласно (43.5)

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

а значит, $\mathbf{x}^2 > 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$ (так как в этом случае среди координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ хоть одна не равна нулю). Добавим, что нетрудно обнаружить *изоморфизм* любых двух собственно евклидовых пространств данного числа измерений n, отображая одно на другое тем же приемом, каким мы отображали трехмерное собственно евклидово пространство на обычное пространство.