

§ 44. Двумерное псевдоевклидово пространство

Мы начнем изучение псевдоевклидовых пространств с простейшего случая двух измерений. Вообще в двумерном евклидовом пространстве ($n=2$) индекс k может принимать значения 0, 1, 2.

Случай $k=0$ приводит к двумерной собственно евклидовой геометрии, т. е. к обыкновенной планиметрии.

Случай $k=2$ отличается от предыдущего лишь формально. В самом деле, в этом случае оба вектора ортонормированного репера мнимоединичные и формулы (42.20) — (42.26) принимают вид

$$e_1^2 = e_2^2 = -1, \quad (44.1)$$

$$g_{11} = g_{22} = -1, \quad g_{12} = 0, \quad (44.2)$$

$$x_1 = -x^1, \quad x_2 = -x^2, \quad (44.3)$$

$$\left. \begin{aligned} xy &= -x_1y_1 - x_2y_2, \\ x^2 &= -x_1^2 - x_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (44.4)$$

Таким образом, скалярные произведения и скалярные квадраты *лишь знаком* отличаются от того, что мы получаем для соответствующих векторов на обычной плоскости, а следовательно, все расстояния в нашем случае отличаются от соответствующих расстояний на обычной плоскости лишь множителем $i = \sqrt{-1}$. Поэтому и разница между обеими геометриями будет лишь формальной, т. е. сводится к разнице в терминологии. В самом деле, расстояние определяется формулой

$$AB = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}$$

на обычной плоскости и формулой

$$AB = i \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}$$

в нашем случае. Таким образом, то, что мы называли расстоянием на обычной плоскости, теперь мы называем расстоянием после умножения на i . Ясно, что всякое предложение одной геометрии может быть повторено для другой в результате простой перефразировки. Такие случаи будут встречаться у нас и в дальнейшем. *Мы примем за общее правило, что если выражения скалярных произведений в ортонормированном репере различаются для двух n -мерных евклидовых геометрий лишь знаком, то эти геометрии мы не будем считать существенно различными и изучать будем лишь одну из них.*

В частности, если в ортонормированном репере скалярный квадрат вектора имеет вид

$$x^2 = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2, \quad (44.5)$$

то такую геометрию мы считаем сводящейся к собственно евклидо-

вой. В дальнейшем, говоря о псевдоевклидовом пространстве, мы исключаем случай (44.5).

В частности, двумерную псевдоевклидову геометрию при $k = 2$ мы считаем сводящейся к собственно евклидовой геометрии, имеющей место при $k = 0$.

Остается, таким образом, лишь случай $k = 1$, который заслуживает внимательного изучения. Соответствующее двумерное псевдоевклидово пространство мы будем называть кратко *псевдоевклидовой плоскостью*.

Будем обозначать—это будет удобно для дальнейшего—мнимое единичный орт ортонормированного репера через e_0 , а единичный—через e_1 :

$$e_0^2 = -1, \quad e_1^2 = 1. \quad (44.6)$$

Соответственно координаты вектора x будут обозначаться x^0 , x^1 и вообще тензорные индексы будут пробегать значения 0, 1 (вместо 1, 2).

По своим *аффинным* свойствам псевдоевклидова плоскость, как мы знаем, не отличается от обычной плоскости, однако по своим метрическим свойствам резко расходится с ней. Поэтому чертежам, которые мы будем делать, нужно доверять лишь в той мере, в какой речь идет об аффинных свойствах, но отнюдь не о метрических. Действительно, чертеж, сделанный на листе бумаги, отражает приблизительно геометрию обычной плоскости, мы же будем изучать псевдоевклидову плоскость. Поэтому чертеж будет «верен» лишь в тех пределах, в каких мы рассматриваем аффинные свойства, общие для обеих плоскостей. С метрическими свойствами дело будет обстоять иначе. Например, ортогональные векторы или равные отрезки псевдоевклидовой плоскости в условном изображении на чертеже (т. е. на обычной плоскости), вообще говоря, ортогональными векторами или равными отрезками выглядеть уже не будут. Не следует думать, что в этом положении вещей кроется что-то загадочное и своеобразное. По существу дело обстоит здесь совершенно так же, как и с картой земных полушарий, т. е. с изображением полусфер в виде плоских кругов. Это изображение неизбежно содержит искажения, поскольку геометрии на сфере и на плоскости существенно различны; неизбежно получается, что расстояния, равные в оригинале (т. е. на полусфере), выглядят, вообще говоря, различными в изображении (т. е. на плоском круге). Совершенно так же обстоит дело и в нашем случае, когда оригиналом является псевдоевклидова плоскость, а ее условным изображением—собственно евклидова плоскость чертежа.

Следует уточнить, как именно мы будем строить это изображение. Орты e_0 , e_1 какого-нибудь ортонормированного репера псевдоевклидовой плоскости мы изобразим в виде ортов на обычной

плоскости; начало O изобразим в виде начала O . Далее, каждую точку M псевдоевклидовой плоскости изобразим точкой обычной плоскости с теми же координатами. Другими словами, вектор \overrightarrow{OM} в изображении должен разлагаться по ортам e_0, e_1 с теми же коэффициентами, как и в оригинале (рис. 7).

Заметим еще, что мы отнюдь не предполагаем, что *любой* ортонормированный в оригинале репер будет ортонормированным и в

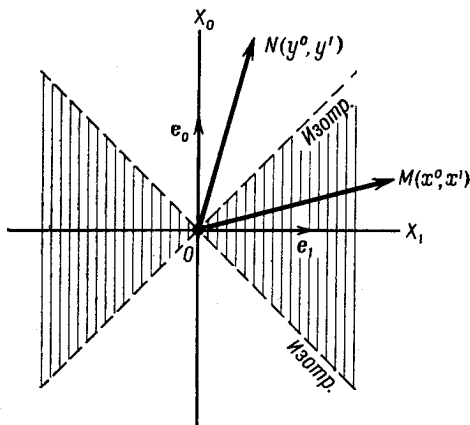


Рис. 7.

изображении: это будет верным лишь для одного первоначально выбранного ортонормированного репера, положенного в основу изображения.

Мы так подробно останавливаемся на этом вопросе, так как в дальнейшем мы будем таким же образом изображать трехмерное псевдоевклидово пространство в обычном трехмерном пространстве, причем все сделанные замечания остаются в силе.

Итак, рассмотрим псевдоевклидову плоскость, отнесенную к ортонормированной координатной системе с векторами репера: мнимоединичным e_0 и единичным e_1 .

Пользуясь условиями (44.6), получаем матрицу координат метрического тензора

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (44.7)$$

Очевидно, обратная матрица, т. е. матрица координат контравариантного метрического тензора, имеет тот же вид:

$$\begin{vmatrix} g^{00} & g^{01} \\ g^{10} & g^{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (44.8)$$

Далее, зависимость между ковариантными и контравариантными координатами вектора x ,

$$x_i = g_{ij} x^j,$$

принимает, очевидно, следующий вид:

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1. \quad (44.9)$$

Скалярное произведение $xy = g_{ij}x^i y^j$ теперь запишется так:

$$xy = -x^0 y^0 + x^1 y^1. \quad (44.10)$$

В частности,

$$x^2 = -x^{0^2} + x^{1^2}. \quad (44.11)$$

Мы предпочтем здесь пользоваться *контравариантными* координатами x^0 , x^1 вектора \mathbf{x} , так как они имеют аффинный характер (коэффициенты разложения \mathbf{x} по \mathbf{e}_0 , \mathbf{e}_1), и потому их можно без ошибок подсчитывать «по чертежу», т. е. так же, как и на обычной плоскости.

Посмотрим теперь, как будут выглядеть «на чертеже» некоторые основные конструкции псевдоевклидовой плоскости.

Для простоты рассматриваемые векторы будем откладывать от начала O ; однако нужно помнить при этом, что по существу O — любая точка псевдоевклидовой плоскости. Найдем прежде всего *изотропные* векторы \mathbf{x} . Полагая $x^2 = 0$, получим согласно (44.11)

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = 0, \quad \text{т. е. } x^0 = \pm x^1. \quad (44.12)$$

Откладывая всевозможные изотропные векторы \mathbf{x} от начала O , мы видим, что их концы располагаются по двум прямым (44.12). *С точки зрения собственно евклидовой геометрии листа бумаги, на котором сделан чертеж, эти прямые являются биссектрисами координатных углов.* С точки же зрения псевдоевклидовой геометрии такое их понимание не имеет, конечно, никакого смысла.

Итак, через каждую точку O псевдоевклидовой плоскости проходят две изотропные прямые (которые испытывают, очевидно, параллельный сдвиг при сдвиге точки O в любое новое положение). Неизотропные векторы \mathbf{x} , откладываемые от начала O , попадают в ту или другую пару вертикальных углов, образованных изотропными прямыми. При этом под углом понимается область на плоскости, выделенная двумя полупрямыми, исходящими из общей точки (в данном случае O), а отнюдь не численная величина угла. В таком понимании угол есть аффинная конструкция, которая в псевдоевклидовой плоскости выглядит так же, как и на обычной плоскости, так что здесь мы можем довериться чертежу.

Рассмотрим сначала векторы, лежащие в одной паре вертикальных углов с ортом \mathbf{e}_1 («первая пара вертикальных углов»). Для этих векторов, как видно из чертежа, $|x^1| > |x^0|$, а следовательно, согласно (44.11)

$$x^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} > 0. \quad (44.13)$$

Таким образом, в первой паре вертикальных углов расположатся векторы *вещественной* длины.

В противоположность этому векторы, лежащие во второй паре вертикальных углов, характеризуются тем, что для них

$$|x^1| < |x^0|,$$

а следовательно,

$$x^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} < 0, \quad (44.14)$$

и эти векторы обладают мнимой длиной.

Окончательно: векторы вещественной длины, отложенные из начала O , располагаются в первой паре вертикальных углов, векторы мнимой длины — во второй паре вертикальных углов и, наконец, изотропные векторы — по сторонам этих углов.

Посмотрим теперь, как выглядят в нашем изображении ортогональные векторы псевдоевклидовой плоскости. Но так как для ортогональности векторов существенно лишь их направление, то мы лучше рассмотрим взаимно ортогональные прямые линии (проведенные для простоты через начало O).

Пусть $M(x^0, x^1)$, $N(y^0, y^1)$ — произвольные точки соответственно на первой и второй из этих прямых. Их радиусы-векторы $\vec{x} = \vec{OM}$ и $\vec{y} = \vec{ON}$ имеют те же координаты, что и сами точки, а условие ортогональности этих векторов имеет вид $\vec{x}\vec{y} = 0$, т. е. согласно (44.10) — $x^0y^0 + x^1y^1 = 0$, откуда

$$y^1 : y^0 = x^0 : x^1. \quad (44.15)$$

Это означает, что в изображении наши прямые имеют взаимно обратные угловые коэффициенты и расположены, следовательно, симметрично относительно биссектрис координатного угла. Подчеркнем, что эта характеристика ортогональных прямых, данная с точки зрения изображения, не имеет ни малейшего смысла с точки зрения оригинала, т. е. геометрии псевдоевклидовой плоскости. Там эти прямые лишь ортогональны, и ничего более.

Из полученного результата ясно, что вопреки обычному поведению ортогональных прямых вращение одной из них вызывает встречное вращение другой, причем когда одна приходит в совпадение с изотропной прямой, другая совпадает с ней же. Это и неудивительно, если принять во внимание, что изотропная прямая, как направленная по изотропному вектору, ортогональна к себе самой.

Теперь, чтобы составить себе представление о метрике псевдоевклидовой плоскости, будем откладывать от начала O отрезки данной постоянной длины ρ во всех направлениях, в которых это возможно сделать. Другими словами, мы описываем окружность данного радиуса ρ с центром O . Эту окружность образуют концы наших отрезков. При этом радиус ρ может быть как вещественным, так и чисто мни-

мым. Запишем условие того, что вектор x имеет длину ρ : $x^2 = \rho^2$, или в координатной записи

$$-x^0{}^2 + x^1{}^2 = \rho^2. \tag{44.16}$$

Если откладывать переменный вектор x постоянной длины ρ от начала O , то его конец опишет нашу окружность радиуса ρ с центром в O , причем (44.16) будет, очевидно, уравнением этой окружности.

Разберем теперь отдельно три случая. Пусть a обозначает какое-либо положительное число. Положим сначала $\rho = a$ (радиус окружности вещественный). Уравнение (44.16) дает

$$-x^0{}^2 + x^1{}^2 = a^2. \tag{44.17}$$

Таким образом, изображением окружности с центром O и вещественным радиусом a служит на плоскости чертежа равнобочная гипербола (44.17) с центром O и действительной осью OX_1 (рис. 8).

Как мы уже отмечали, не следует смущаться тем, что радиусы окружности, равные в оригинале, получились в изображении различными: это неизбежное искажение получается в результате несовпадения геометрических свойств оригинала и изображения.

Далее, непривычное для нас распадение окружности на две разомкнутые ветви вытекает из свойств псевдоевклидовой метрики, непохожих на обычные.

Рассмотрим теперь случай $\rho = ai$ (радиус окружности мнимый). Тогда уравнение (44.16) дает

$$-x^0{}^2 + x^1{}^2 = -a^2, \tag{44.18}$$

т. е. в этом случае изображением окружности служит равнобочная гипербола с центром O и действительной осью OX_0 . Итак, в псевдоевклидовой плоскости окружности (при $\rho \neq 0$) принадлежат к числу гипербол, а не эллипсов, как в собственно евклидовой плоскости.

Наконец, в случае $\rho = 0$ мы возвращаемся к уравнению (44.12), и окружность нулевого радиуса сводится к паре изотропных прямых.

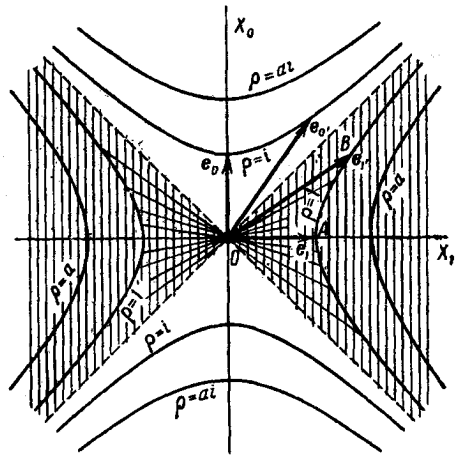


Рис. 8.