§ 45. Вращение ортонормированного репера в псевдоевклидовой плоскости

Выясним, как будет выглядеть переход от одного ортонормированного репера к другому в псевдоевклидовой плоскости.

Сдвиг начала O совершается тривиальным образом, так что мы займемся лишь преобразованием ортов при неподвижном начале. Такое преобразование ортонормированного репера мы будем называть его *вращением*.

Пусть $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ — старые и $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ — новые орты. По общим формулам

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= A^0_{0'}\mathbf{e}_0 + A^1_{0'}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= A^0_{1'}\mathbf{e}_0 + A^1_{1'}\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{45.1}$$

Заметим, что здесь $A^0_{0'} \neq 0$. Действительно, в противном случае оказалось бы, что мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_{0'}$ лишь численным множителем отличается от единичного вектора $\mathbf{e}_1$, что после почленного возведения в скалярный квадрат приводит к противоречию (все коэффициенты $A^i_{i'}$ — вещественные ввиду вещественного характера псевдоевклидовой плоскости). По той же причине $A^1_{1'} \neq 0$. В силу ортогональности ортов $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ мы получаем согласно (44.15)

$$A^1_{0'} : A^0_{0'} = A^0_{1'} : A^1_{1'}. \tag{45.2}$$

Обозначая

$$A^0_{0'} = a, \quad A^1_{1'} = b, \tag{45.3}$$

а также обозначая общее значение отношений (45.2) через β, получим:

$$A^1_{0'} = a\beta, \quad A^0_{1'} = b\beta, \tag{45.4}$$

и преобразование (45.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= a(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1), \\ \mathbf{e}_{1'} &= b(\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1). \end{aligned}\right\} \tag{45.5}$$

Запишем теперь, что орт $\mathbf{e}_{0'}$ — мнимоединичный:

$$\mathbf{e}^2_{0'} = -(A^0_{0'})^2 + (A^1_{0'})^2 = -a^2 + a^2\beta^2 = -1,$$

откуда

$$a = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.6}$$

Записывая аналогично, что орт $\mathbf{e}_{1'}$ — единичный, получим:

$$\mathbf{e}^2_{1'} = -(A^0_{1'})^2 + (A^1_{1'})^2 = -b^2\beta^2 + b^2 = 1,$$

откуда

$$b = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.7}$$

Пользуясь последними результатами, можно окончательно переписать закон преобразования (45.5):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{45.8}$$

Ясно, что β можно давать лишь значения, по модулю меньшие единицы, иначе коэффициенты преобразования оказались бы мнимыми или (в случае $\beta = 1$) вообще не существовали бы. Итак,

$$-1 < \beta < 1. \tag{45.9}$$

Зато в этих пределах β можно давать любые значения, а также можно в каждой из двух формул (45.8) брать $\sqrt{1-\beta^2}$ с любым знаком, в одной *независимо* от другой. То, что при этом формулы (45.8) всегда переводят ортонормированный репер снова в ортонормированный, ясно и из нашего вывода, и легко устанавливается простой проверкой.

Мы получаем четыре типа вращений ортонормированного репера в зависимости от знака, с каким берется $\sqrt{1-\beta^2}$ в верхней и нижней формулах (45.8). Этот знак в верхней формуле, очевидно, совпадает со знаком $A_{0'}^{0}$, причем, если он положительный, то $\mathbf{e}_{0'}$ продолжает быть направленным «вверх» от OX_1, т. е. к той же ветви мнимоединичной окружности, что и $\mathbf{e}_0$; если же он отрицательный, то $\mathbf{e}_{0'}$ «перепрокидывается» к другой («нижней») ее ветви.

Аналогично знак $\sqrt{1-\beta^2}$, избранный нами для нижней формулы, совпадает, очевидно, со знаком $A_{1'}^{1}$. При этом $\mathbf{e}_{1'}$ остается направленным к той же, как и $\mathbf{e}_1$ («правой»), ветви единичной окружности, если этот знак положительный, и «перепрокидывается» к другой («левой») ее ветви, если этот знак отрицательный.

В результате можно следующим образом охарактеризовать четыре типа вращений ортонормированного репера:

1°. *Собственное вращение.* Так мы будем называть вращение при условии $A_{0'}^{0} > 0$, $A_{1'}^{1} > 0$. Тогда (45.8) дает

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.10}$$

В согласии со сказанным при собственном вращении концы векторов $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{0'}$ остаются на прежних ветвях единичной и соответственно мнимоединичной окружностей (рис. 8; чертеж отвечает случаю $\beta > 0$).

Векторы $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ *будут в изображении* симметричными относительно «биссектрисы координатного угла» (как и полагается ортогональным векторам). Неравноправие реперов $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ и $\{O, \mathbf{e}_{0'}, \mathbf{e}_{1'}\}$ кажущееся и связано с условностью их изображения на обычной плоскости (отчего и получается, что один как бы «настоящий», а другой «искаженный»). Мы могли бы условиться, наоборот, векторы $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ изображать ортами обычной плоскости, и тогда $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ изобразились бы более длинными векторами, образующими тупой угол (рис. 9).

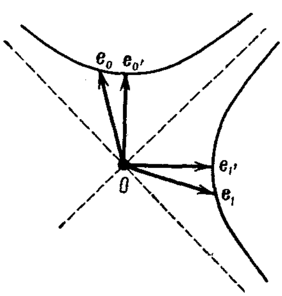

Рис. 9.

При непрерывном изменении β в допустимых для него пределах (45.9) непрерывно меняется и соответствующее собственное вращение, причем при $\beta = 0$ мы имеем тождественное преобразование. Отсюда видно, что собственное вращение репера может быть осуществлено за счет *непрерывного* процесса вращения, а именно при непрерывном изменении β от 0 до требуемого значения. Вычислим еще определитель преобразования:

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} = 1. \qquad (45.11)$$

Собственное вращение не меняет ориентации репера.

2°. *Несобственное вращение 1-го рода.* Так мы будем называть вращение репера при условии

$$A_{0'}^{0} > 0, \quad A_{1'}^{1} < 0.$$

Это значит, что конец единичного орта $\mathbf{e}_1$ «перепрокидывается» на другую ветвь единичной окружности, конец же орта $\mathbf{e}_0$ остается на прежней ветви мнимоединичной окружности. Формулы (45.8) принимают вид

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (45.12)$$

При β, непрерывно меняющемся в пределах (45.9), непрерывно меняется и несобственное вращение 1-го рода, причем, конечно, тождественное преобразование из него получить невозможно. При $\beta=0$ мы получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}=\mathbf{e}_0,\quad \mathbf{e}_{1'}=-\mathbf{e}_1, \tag{45.13}$$

т. е. происходит как бы зеркальное отражение репера за счет перепрокидывания оси OX_1 при неподвижной оси OX_0 (зеркальное отражение относительно оси OX_0). Нетрудно заметить, сравнивая формулы (45.12) с (45.10), что всякое несобственное вращение 1-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него зеркального отражения (45.13). Заметим еще, что в нашем случае

$$\operatorname{Det}|A^i_{i'}|=-1, \tag{45.14}$$

и следовательно, ориентация репера меняется на обратную.

3°. *Несобственное вращение 2-го рода* определяется условием

$$A^0_{0'}<0,\quad A^1_{1'}>0.$$

Оно вполне аналогично несобственному вращению 1-го рода с той лишь разницей, что теперь конец орта $\mathbf{e}_0$ перепрокидывается на другую ветвь мнимоединичной окружности, а конец орта $\mathbf{e}_1$ остается на прежней ветви единичной окружности. Формулы преобразования будут:

$$\mathbf{e}_{0'}=-\frac{\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad \mathbf{e}_{1'}=\frac{\beta\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.15}$$

При $\beta=0$ получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}=-\mathbf{e}_0,\quad \mathbf{e}_{1'}=\mathbf{e}_1, \tag{45.16}$$

т. е. происходит зеркальное отражение репера относительно оси OX_1. Принципиальная разница сравнительно с (45.13) заключается в том, что зеркальное отражение происходит там относительно прямой с мнимыми расстояниями вдоль нее, а здесь относительно прямой с вещественными расстояниями.

Сравнивая формулы (45.15) с (45.10), замечаем, что несобственное вращение 2-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него зеркального отражения (45.16).

Отметим еще, что в нашем случае

$$\operatorname{Det}|A^i_{i'}|=-1, \tag{45.17}$$

так что ориентация репера меняется на обратную.

4°. *Несобственное вращение 3-го рода* определяется условием

$$A^0_{0'}<0,\quad A^1_{1'}<0.$$

Концы обоих ортов перескакивают на другие ветви соответствующих окружностей. Формулы преобразования будут:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{45.18}$$

Очевидно, в этом случае

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = 1,$$

и ориентация репера сохраняется. При непрерывном изменении β в пределах (45.9) несобственные вращения 3-го рода меняются непрерывно; конечно, тождественное преобразование в их число не входит. При $\beta = 0$ получаем:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\mathbf{e}_1, \tag{45.19}$$

т. е. репер испытывает как бы отражение относительно начала O. Заметим, что в нашем случае нельзя получить такое преобразование непрерывным «вращением на 180°», как мы сделали бы на обычной плоскости; изотропные прямые представляют непреодолимую преграду для непрерывного вращения орта (который, оставаясь единичным или мнимоединичным вектором, не может принять изотропное направление).

Сравнивая формулы (45.18) с (45.10), мы замечаем, что несобственное вращение 3-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него отражения (45.19).

Как мы видели, вращения репера в пределах каждого из четырех типов непрерывно переходят одно в другое за счет непрерывного изменения β. Зато два вращения разных типов не могут быть непрерывным образом переведены одно в другое. В самом деле, такие вращения всегда отличаются друг от друга тем, что при одном из них конец орта $\mathbf{e}_0$ (или $\mathbf{e}_1$) остается на прежней ветви окружности, а при другом перескакивает на другую ветвь. Так как этот переход нельзя осуществить непрерывным образом, то нельзя осуществить и непрерывный переход от вращения одного типа к вращению другого типа. То же самое легко установить и из того, что $A^0_{0'}$ и $A^1_{1'}$ не могут обращаться в нуль, а следовательно, при непрерывном изменении не могут менять знака.

Мы рассматривали вращения ортонормированного репера. Но следом за вращением данного ортонормированного репера всегда можно заставить вращаться и саму псевдоевклидову плоскость. А именно, каждую точку плоскости мы будем переводить в новую точку, расположенную относительно нового репера точно так же, как прежняя точка была расположена относительно прежнего репера. Другими словами, координаты x^0, x^1 новой точки относительно нового репера должны совпадать с координатами x^0, x^1 прежней точки относительно прежнего репера. Такое преобразование псевдоевклидовой плоскости в себя мы будем называть ее *вращением* около фиксированной точки O и относить к одному из четырех типов в соответствии с характером вращения репера. При этом классификации вращений можно придать форму, независимую от выбора начального репера: при собственных вращениях каждая ветвь и единичной и мнимоединичной окружностей переходит в себя; при несобственных вращениях соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода меняются местами: 1) ветви единичной окружности, 2) ветви мнимоединичной окружности, 3) ветви обеих окружностей.

Сходство вращения псевдоевклидовой плоскости с вращениями обычной плоскости заключается, конечно, в том, что как при тех, так и при других остается неподвижной одна точка (точка O), и, главное, геометрические свойства фигур не испытывают никаких изменений. В самом деле, поскольку координаты перемещенных точек относительно повернутого репера остались прежними, а повернутый репер остался ортонормированным и обладает, следовательно, в точности прежними геометрическими свойствами, то и свойства фигур в результате вращения не меняются. Позже мы уточним сказанное здесь (§ 52).

Комбинируя произвольные вращения около точки O с произвольными параллельными сдвигами, мы получаем преобразования ортонормированного репера, а вслед за ним и преобразования плоскости в себя, которые мы будем называть *движениями* в псевдоевклидовой плоскости. Движения, очевидно, тоже сохраняют геометрические свойства фигур и, как позже мы увидим, исчерпывают все преобразования псевдоевклидовой плоскости в себя, обладающие этим свойством.

На обычной плоскости существуют движения двух сортов: собственные движения, при которых сохраняется ориентация плоскости и которые можно осуществить, переводя плоскость из начального положения в конечное непрерывным образом, и несобственные движения, которые меняют ориентацию плоскости на обратную и которые можно получить, комбинируя собственные движения с зеркальным отражением относительно какой-либо прямой.

На псевдоевклидовой плоскости движения будут уже четырех типов, в зависимости от того, какого типа будет вращение около точки O, входящее в его состав (наряду с параллельным сдвигом).

Эти четыре типа движений мы будем называть соответственно *собственными движениями* и *несобственными движениями* 1-го, 2-го и 3-го рода. Согласно ранее сказанному в пределах каждого типа возможен непрерывный переход от одного движения к другому. В частности, собственные движения включают в себя тождественное преобразование и их можно осуществлять непрерывным переходом от начального положения плоскости к конечному; несобственные же движения 1-го, 2-го и 3-го рода получаются наложением на собственные движения отражений соответственно относительно прямой с мнимыми расстояниями, относительно прямой с вещественными расстояниями и относительно точки.

В связи с этим и ортонормированные реперы распадаются на четыре класса, в зависимости от того, какого типа движением они получаются из какого-либо исходного репера: собственным движением или несобственным движением 1-го, 2-го или 3-го рода. В пределах одного класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому; между двумя различными классами он невозможен.

В терминах теории групп Ли можно сказать, что группа движений на псевдоевклидовой плоскости несвязная и состоит из четырех связных компонент. То, что движения действительно образуют группу, легко проверяется (мы сейчас не будем этим заниматься, так как затем все сказанное будет выведено в общем случае n-мерного псевдоевклидова пространства).

§ 46. Измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости

В § 37 мы определили объем произвольного тела D в n-мерном аффинном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int_D dx^1 \ldots dx^n$$

в какой-либо аффинной координатной системе. В частности, «двумерный объем», т. е. площадь в случае двумерного аффинного пространства, имеет вид

$$V_D = \iint_D dx^1\, dx^2. \tag{46.1}$$

Определенная таким образом площадь (как и объем в общем случае) представляет собой лишь относительный инвариант, принимающий различные численные значения в различных координатных системах, а именно, умножающийся на $|\operatorname{Det}\|A^i_{i'}\||^{-1}$ при переходе от одного репера к другому:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{46.2}$$

Но в случае двумерного *евклидова* пространства мы находимся в лучшем положении, так как у нас среди аффинных координатных систем выделены *ортонормированные* координатные системы.