же движения 1-го, 2-го и 3-го рода получаются наложением на собственные движения отражений соответственно относительно прямой с мнимыми расстояниями, относительно прямой с вещественными расстояниями и относительно точки.

В связи с этим и ортонормированные реперы распадаются на четыре класса, в зависимости от того, какого типа движением они получаются из какого-либо исходного репера: собственным движением или несобственным движением 1-го, 2-го или 3-го рода. В пределах одного класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому; между двумя различными классами он невозможен.

В терминах теории групп Ли можно сказать, что группа движений на псевдоевклидовой плоскости несвязная и состоит из четырех связных компонент. То, что движения действительно образуют группу, легко проверяется (мы сейчас не будем этим заниматься, так как затем все сказанное будет выведено в общем случае n-мерного псевдоевклидова пространства).

§ 46. Измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости

В § 37 мы определили объем произвольного тела D в n-мерном аффинном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n$$

в какой-либо аффинной координатной системе. В частности, «двумерный объем», т. е. площадь в случае двумерного аффинного пространства, имеет вид

$$V_D = \iint\limits_D dx^1\, dx^2. \tag{46.1}$$

Определенная таким образом площадь (как и объем в общем случае) представляет собой лишь относительный инвариант, принимающий различные численные значения в различных координатных системах, а именно, умножающийся на $|\operatorname{Det}|A^i_{i'}||^{-1}$ при переходе от одного репера к другому:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{46.2}$$

Но в случае двумерного *евклидова* пространства мы находимся в лучшем положении, так как у нас среди аффинных координатных систем выделены *ортонормированные* координатные системы.

Мы условимся называть площадью фигуры D в двумерном евклидовом пространстве интеграл V_D (46.1), *вычисленный в ортонормированной координатной системе.*

Определенная таким образом площадь будет уже *инвариантом.* В случае собственно евклидовой, т. е. обычной, плоскости хорошо известно, что интеграл V_D действительно дает площадь в обычном смысле слова, разумеется, не зависящую от той ортонормированной координатной системы, в которой она вычисляется.

В случае псевдоевклидовой плоскости матрица преобразования (46.2) при всех вращениях ортонормированного репера удовлетворяет (как мы видели в § 45) следующему условию:

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = \pm 1, \text{ следовательно, } |\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}|| = 1, \tag{46.3}$$

а отсюда следует, что интеграл (46.1) при переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой не меняется (умножается на единицу).

Переходим теперь к измерению углов на псевдоевклидовой плоскости. Мы воспользуемся здесь следующим построением обычной планиметрии. Желая измерить данный угол, мы строим единичный круг с центром в вершине угла и берем *удвоенную площадь сектора*, вырезанного из этого круга сторонами угла. Очевидно, это и будет как раз величина угла, измеренного в естественной мере — в радианах.

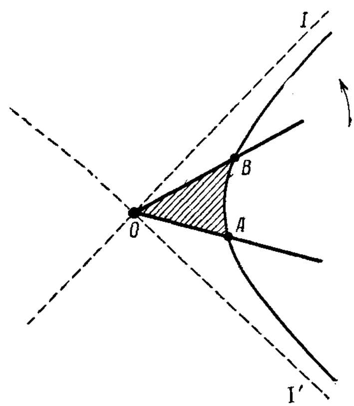

Рис. 10.

Аналогично мы будем поступать и на псевдоевклидовой плоскости. Однако здесь *мы будем измерять лишь углы, для которых все полупрямые, исходящие из вершины и проходящие внутри угла или по его сторонам, будут неизотропными.* Другими словами, если представить себе, что угол описывается вращением одной его стороны до совпадения ее с другой стороной, то мы хотим, чтобы в течение этого процесса вращающаяся сторона нигде не принимала изотропного направления. Смысл этого ограничения вскоре станет ясным. Углы, удовлетворяющие нашему условию, мы будем называть *допустимыми.*

Опишем теперь единичную и мнимоединичную окружности с центром в вершине O данного допустимого угла (рис. 10). Тогда (в силу нашего условия) стороны угла пересекутся *с одной и той же ветвью* какой-нибудь из этих окружностей. Образуется сектор AOB, *удвоенную площадь которого мы будем называть величиной угла* $\widehat{AOB}$ (или, кратко, просто углом $\widehat{AOB}$).

Из этого определения ясно, что величина угла обладает аддитивным свойством: если допустимый угол разделить полупрямой, исходящей из его вершины, на два угла, то его величина будет равняться сумме величин составляющих его углов.

Таким образом, измерение углов производится по отдельности внутри каждого из четырех «основных углов», образованных в данной точке проходящими через нее изотропными прямыми. При этом мы отказываемся измерять углы, «перекидывающиеся» из одного основного угла в другой. Причина этого станет ясна, если мы будем менять угол $\widehat{AOB}$ (рис. 10), вращая, например, его сторону OB против часовой стрелки и стремясь к совпадению с изотропным направлением OI. Тогда площадь сектора AOB стремится к бесконечности. Действительно, площадь в оригинале (на псевдоевклидовой плоскости) и площадь в изображении (на обычной плоскости) одинаково выражаются интегралом (46.1) в ортонормированной координатной системе и, следовательно, совпадают. В изображении же площадь сектора AOI как площадь, ограниченная ветвью гиперболы и ее асимптотой, является бесконечной.

Итак, величина угла $\widehat{AOB}$ стремится к бесконечности, когда хоть одна из его сторон стремится к изотропному направлению. Отсюда ясно, что угол, в котором сторона OB достигла изотропного направления OI, мы измерять не будем (его величину пришлось бы признать бесконечной) и тем более не будем измерять угол, в котором сторона OB перешла за изотропное направление OI (величина угла как бы сверхбесконечная).

Подсчитаем, в частности, угол, на который поворачивается вектор $\mathbf{e}_1$ при собственном вращении (45.10) ортонормированного репера $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ (рис. 8).

Требуется подсчитать, следовательно, площадь сектора AOB, причем это можно сделать, как мы только что отмечали, и в изображении. Воспользуемся полярными координатами, разумеется, на плоскости изображения. Тогда

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2}\int_0^\alpha r^2\,d\varphi. \qquad (46.4)$$

Здесь r — полярный радиус — выражается через полярный угол φ из уравнения единичной окружности

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = 1.$$

Так как x^1, x^0 в изображении играют роль прямоугольных декартовых координат, то

$$x^1 = r\cos\varphi, \qquad x^0 = r\sin\varphi, \qquad (46.5)$$

и мы получаем:

$$r^2(-\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=1, \quad r^2=\frac{1}{\cos 2\varphi}. \tag{46.6}$$

Вставляя это значение в (46.4), имеем:

$$\text{пл. } AOB=\frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi}=\frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right). \tag{46.7}$$

Здесь α — конечное значение полярного угла φ — совпадает с углом наклона вектора $\mathbf{e}_{1'}$ к вектору $\mathbf{e}_1$ (в изображении!). Обозначим через θ псевдоевклидов угол между $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_{1'}$. Тогда по общему определению

$$\theta=2 \text{ пл. } AOB=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1}=\operatorname{th}\theta. \tag{46.8}$$

Итак, гиперболический тангенс угла между $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'}$ *в псевдоевклидовой плоскости равен тангенсу угла между этими векторами в плоскости изображения* (при условии, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_0$ в изображении тоже являются ортонормированными, как мы все время это и предполагаем).

При вычислении угла θ мы молчаливо приписали ему (как и площади AOB) знак, совпадающий со знаком полярного угла α. В этом смысле нужно понимать и формулу (46.8).

Из (46.8) видно еще раз, что когда направление $\mathbf{e}_{1'}$ стремится к изотропному, т. е. когда $\alpha\to\pm\frac{\pi}{4}$ и, значит, $\operatorname{tg}\alpha\to\pm 1$, то $\operatorname{th}\theta\to\pm 1$, а следовательно, $\theta\to\pm\infty$.

Таким образом, заставляя $\mathbf{e}_{1'}$ вращаться в пределах основного угла $I'OI$, мы заставляем псевдоевклидов угол θ его наклона к $\mathbf{e}_1$ меняться от $-\infty$ до $+\infty$.

Поучительно выразить формулы преобразования (45.10)

$$\mathbf{e}_{0'}=\frac{\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'}=\frac{\beta\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{46.9}$$

через угол θ. Так как координаты вектора $\mathbf{e}_{1'}$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0\}$ равны, как мы видим, $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то, пользуясь обычной геометрией на плоскости изображения, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\beta,$$

а отсюда

$$\beta = \operatorname{th}\theta, \tag{46.10}$$

и следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} = \operatorname{ch}\theta, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} = \operatorname{sh}\theta.$$

Формулы собственного вращения (46.9) примут теперь вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \operatorname{ch}\theta\mathbf{e}_0 + \operatorname{sh}\theta\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \operatorname{sh}\theta\mathbf{e}_0 + \operatorname{ch}\theta\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{46.11}$$

Эти формулы по внешности напоминают формулы собственного вращения ортонормированного репера на обычной плоскости

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \cos\alpha\mathbf{e}_0 - \sin\alpha\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \sin\alpha\mathbf{e}_0 + \cos\alpha\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{46.12}$$

Но, конечно, замена тригонометрических функций гиперболическими (а также изменение знака в одном члене) сильно преобразует всю картину. В частности, в формулах (46.11) можно менять θ от $-\infty$ до $+\infty$ без периодического повторения результата, как это будет в обычных формулах (46.12).

Мы можем теперь ввести *измерение углов в любом n-мерном вещественном евклидовом пространстве.* Проводим через стороны угла двумерную плоскость. Она или несет на себе собственно евклидову геометрию (как это всегда будет в случае собственно евклидова пространства), и тогда угол измеряется как на обычной плоскости, или является псевдоевклидовой, и тогда угол измеряется так, как было только что показано, или является изотропной, и тогда измерение угла не имеет смысла.

В первом случае острый (или прямой) угол между векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ определяется обычной формулой

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{ab}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2}}, \tag{46.13}$$

во втором же случае формулой

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{|\mathbf{ab}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2}}, \tag{46.14}$$

причем здесь предполагается, что $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{ab}$ — одного знака (иначе угол не имеет смысла). В самом деле, если этот знак положительный, то можно принять:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} = \mathbf{e}_1, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^2}} = \mathbf{e}_{1'}, \tag{46.15}$$

причем $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{1'} > 0$, т. е. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'}$ лежат в одном основном угле. Тогда, умножая скалярно на $\mathbf{e}_1$ второе из уравнений (46.11), получаем:

$$\mathbf{e}_{1'}\mathbf{e}_1 = \operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (46.15), приходим к формуле (46.14).

Если же знак $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{ab}$ отрицательный, то положим:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{-\mathbf{a}^2}} = \mathbf{e}_0, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{-\mathbf{b}^2}} = \mathbf{e}_{0'}, \tag{46.16}$$

причем $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{0'} < 0$, т. е. $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_{0'}$ лежат в одном основном угле. Умножая скалярно на $\mathbf{e}_0$ первое из уравнений (46.11), получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}\mathbf{e}_0 = -\operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (46.16), снова приходим к (46.14).

Заметим, что для данных неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ первый, второй или третий случай имеет место в зависимости от положительного, отрицательного или нулевого значения $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{ab})^2$.

§ 47. Трехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1

После евклидовых пространств индекса $k=0$, т. е. собственно евклидовых, наибольший интерес представляют евклидовы пространства индекса $k=1$ (они, конечно, принадлежат к псевдоевклидовым пространствам). Псевдоевклидова плоскость, рассмотренная нами в §§ 45, 46, — это двумерный случай такого пространства. Евклидово пространство индекса 1 представляет интерес с точки зрения теории дифференциальных уравнений (волновое уравнение с n аргументами) и особенно с точки зрения теории относительности. В последнем случае играет роль именно *четырехмерное евклидово пространство индекса* 1. Однако для наглядности мы рассмотрим сначала *трехмерный случай*. Здесь индекс k может принимать значения 0, 1, 2, 3.

При $k=0$ получаем собственно евклидово (обычное) пространство и при $k=3$ фактически снова его же. Действительно, все орты будут вместо единичных мнимоединичными, и скалярный квадрат вместо вида

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}$$

будет иметь вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2},$$

что означает лишь формальную разницу, сводящуюся к изменению знака у скалярного произведения (ср. начало § 44).