причем $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{1'} > 0$, т. е. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'}$ лежат в одном основном угле. Тогда, умножая скалярно на $\mathbf{e}_1$ второе из уравнений (46.11), получаем:

$$\mathbf{e}_{1'}\mathbf{e}_1 = \operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (46.15), приходим к формуле (46.14).

Если же знак $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{ab}$ отрицательный, то положим:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{-\mathbf{a}^2}} = \mathbf{e}_0, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{-\mathbf{b}^2}} = \mathbf{e}_{0'}, \tag{46.16}$$

причем $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{0'} < 0$, т. е. $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_{0'}$ лежат в одном основном угле. Умножая скалярно на $\mathbf{e}_0$ первое из уравнений (46.11), получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}\mathbf{e}_0 = -\operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (46.16), снова приходим к (46.14).

Заметим, что для данных неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ первый, второй или третий случай имеет место в зависимости от положительного, отрицательного или нулевого значения $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2-(\mathbf{ab})^2$.

§ 47. Трехмерное псевдоевклидово пространство индекса 1

После евклидовых пространств индекса $k=0$, т. е. собственно евклидовых, наибольший интерес представляют евклидовы пространства индекса $k=1$ (они, конечно, принадлежат к псевдоевклидовым пространствам). Псевдоевклидова плоскость, рассмотренная нами в §§ 45, 46,—это двумерный случай такого пространства. Евклидово пространство индекса 1 представляет интерес с точки зрения теории дифференциальных уравнений (волновое уравнение с n аргументами) и особенно с точки зрения теории относительности. В последнем случае играет роль именно *четырехмерное евклидово пространство индекса* 1. Однако для наглядности мы рассмотрим сначала *трехмерный случай*. Здесь индекс k может принимать значения 0, 1, 2, 3.

При $k=0$ получаем собственно евклидово (обычное) пространство и при $k=3$ фактически снова его же. Действительно, все орты будут вместо единичных мнимоединичными, и скалярный квадрат вместо вида

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}$$

будет иметь вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2},$$

что означает лишь формальную разницу, сводящуюся к изменению знака у скалярного произведения (ср. начало § 44).

Точно такая же лишь формальная разница будет между случаем $k=1$

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}$$

и случаем $k=2$

$$\mathbf{x}^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2}.$$

Поэтому вещественное трехмерное евклидово пространство имеет смысл рассматривать лишь в случаях $k=0$ (собственно евклидово пространство) и $k=1$ (псевдоевклидово пространство).

К изучению последнего мы и переходим.

Выберем какой-либо ортонормированный репер. Так как индекс пространства равен единице, то один орт будет мнимоединичным — его мы обозначим $\mathbf{e}_0$, а два других единичными: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Итак,

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1, \quad \text{кроме того,} \quad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j). \tag{47.1}$$

В соответствии с формулой $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ мы получаем:

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \tag{47.2}$$

Согласно формуле $x_i = g_{ij}x^j$ получаем связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора в виде

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2. \tag{47.3}$$

Скалярное произведение и скалярный квадрат выразятся формулами:

$$\mathbf{xy} = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2, \tag{47.4}$$

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}. \tag{47.5}$$

Выясним некоторые основные свойства нашего пространства. Прежде всего рассмотрим всевозможные изотропные векторы $\mathbf{x}$, причем для наглядности будем откладывать их от начала O (разумеется, за начало O можно принять любую точку пространства). Тогда концы векторов $\mathbf{x}$ будут иметь те же координаты x^i, что и сами векторы, а так как векторы изотропные, то $\mathbf{x}^2 = 0$, а следовательно:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = 0. \tag{47.6}$$

Как и в случае псевдоевклидовой плоскости, мы будем пользоваться изображением нашего пространства в обычном пространстве. А именно, орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ данного репера изобразим обыкновенными ортами, начало O — некоторой точкой обычного пространства, а все остальные точки M изобразим такими точками обычного пространства, чтобы вектор $\overrightarrow{OM}$ в изображении разлагался по $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ всегда с теми же коэффициентами, как и в оригинале.

Очевидно, аффинные свойства изображения точно передают аффинные свойства оригинала (мы имеем здесь аффинный изоморфизм), но метрические свойства будут резко различными.

Мы видим, что в изображении концы изотропных векторов располагаются на конусе 2-го порядка (47.6). Впрочем, и в оригинале поверхность (47.6) мы вправе называть конусом 2-го порядка ввиду аффинного характера этого понятия. А именно, конус 2-го порядка в трехмерном вещественном аффинном пространстве можно определить как поверхность, имеющую уравнение вида (47.6) в некоторой аффинной координатной системе.

Конус 2-го порядка, на котором располагаются концы всевозможных изотропных векторов, отложенных из данной точки O, мы будем называть изотропным конусом. В изображении изотропный конус выглядит как прямой круглый конус с осью OX_0 и с углом $45°$ между осью и образующей. Очевидно, при переходе в другую точку O^* изотропный конус переносится параллельным сдвигом на вектор $\overrightarrow{OO^*}$.

Будем откладывать теперь от начала O всевозможные векторы $\mathbf{x}$ мнимой длины. Для этих векторов $\mathbf{x}^2<0$, а значит, координаты их концов удовлетворяют условию

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}<0, \quad \text{т. е.} \quad |x^0|>\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}. \qquad (47.7)$$

Концы этих векторов расположены, очевидно, внутри изотропного конуса, так как в *изображении* их расстояния от оси конуса меньше расстояний от плоскости OX_1X_2 (в то время как для точек конуса эти расстояния равны). Напротив, концы векторов $\mathbf{x}$ вещественной длины ($\mathbf{x}^2>0$) удовлетворяют условию

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}>0, \text{ т. е. } |x^0|<\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}, \qquad (47.8)$$

и располагаются вне изотропного конуса. Аналогичная картина повторяется, конечно, и при откладывании векторов $\mathbf{x}$ от любой точки пространства O^*.

Таким образом, ясно, что прямые, исходящие из данной точки, распадаются на три класса: прямые, расположенные внутри изотропного конуса (длины мнимые), вне изотропного конуса (длины вещественные) и по самому конусу (длины нулевые). Эта картина повторяется в псевдоевклидовом пространстве любого числа измерений (см. рис. 11, стр. 283). В двумерном случае роль изотропного конуса играет пара изотропных прямых.

Рассмотрим теперь двумерные плоскости трехмерного псевдоевклидова пространства, причем для простоты будем проводить их тоже через начало O. Здесь возможны три случая.

1°. *Плоскость проходит, не считая точки O, целиком вне изотропного конуса.* Тогда все ее векторы $\mathbf{x}$ (не считая вектора $\mathbf{x}=0$)

обладают положительным скалярным квадратом $\mathbf{x}^2>0$, так что плоскость обладает *собственно евклидовой геометрией* (т. е. на ней имеет место обычная планиметрия).

Примером такой плоскости может служить, очевидно, координатная плоскость X_1OX_2. Обратно, всякая собственно евклидова плоскость, проходящая через O, может быть принята за координатную плоскость X_1OX_2 при подходящем выборе ортов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ строим в плоскости, $\mathbf{e}_0$ — ортогонально к ней).

2°. *Плоскость касается изотропного конуса по одной образующей.* Заметим прежде всего, что касание плоскости с изотропным конусом по его образующей *равносильно* тому, что плоскость проходит через начало O и ортогональна к этой образующей.

В самом деле, пусть $\mathbf{u}(u^0,\ u^1,\ u^2)$ — радиус-вектор какой-либо (отличной от O) точки на образующей. Тогда, как видно из уравнения изотропного конуса, уравнение плоскости, касательной к нему, в этой точке (а следовательно, и вдоль всей образующей) будет:

$$-x^0u^0+x^1u^1+x^2u^2=0. \tag{47.9}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\mathbf{xu}=0, \tag{47.10}$$

где $\mathbf{x}$ — радиус-вектор любой точки нашей плоскости. Таким образом, (47.9) равносильно тому, что радиус-вектор любой точки плоскости ортогонален к $\mathbf{u}$, т. е. что плоскость проходит через O и ортогональна к образующей. Этим наше утверждение доказано.

Теперь ясно, что *плоскость, касающаяся изотропного конуса по образующей, будет изотропной* (так как она содержит вектор $\mathbf{u}$, ортогональный ко всем ее векторам).

Обратно, *всякая изотропная плоскость, проходящая через O, будет касаться изотропного конуса по некоторой образующей.* В самом деле, прямая, ортогональная к изотропной плоскости, сама будет изотропной (вытекает из теоремы § 41 при $n=3$, $m=2$) и, следовательно, если ее провести через начало O, является образующей изотропного конуса. Таким образом, наша изотропная плоскость проходит через O и ортогональна к одной из образующих изотропного конуса, а это, как мы только что видели, равносильно касанию с изотропным конусом вдоль этой образующей.

3°. *Плоскость пересекается с изотропным конусом по двум образующим.* Тем самым случай касания с конусом устранен, а значит, плоскость неизотропная и несет на себе евклидову метрику. Остается выяснить, чему равен индекс этой метрики: 0, 1 или 2? Собственно евклидов случай ($k=0$) и сводящийся к нему ($k=2$) отпадают, так как в этих случаях на плоскости нет изотропных прямых, в то время как наша плоскость их содержит (а именно, две образующие, по которым она пересекается с изотропным конусом, и, конечно, все параллельные им прямые).

Остается случай $k=1$, т. е. наша плоскость *псевдоевклидова.* Примером такой плоскости может служить, очевидно, координатная плоскость X_0OX_1. Обратно, всякая псевдоевклидова плоскость, проходящая через O, может быть принята за плоскость X_0OX_1 при подходящем выборе ортов ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ — на плоскости, $\mathbf{e}_2$ — ортогонально к ней).

Заметим, что в случае n-мерного псевдоевклидова пространства индекса $k=1$ все наши рассуждения (проведенные для случая $n=3$) повторяются дословно; только вместо изотропного конуса нужно рассматривать *изотропный гиперконус*

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2}=0,$$

а вместо плоскостей — гиперплоскости.

Рассмотрим теперь картину взаимно ортогональных направлений в нашем пространстве. Здесь будет более наглядным рассматривать не взаимно ортогональные прямые, а взаимно ортогональные прямую и плоскость (проходящие для простоты через начало O). Пусть прямая задана направляющим вектором $\mathbf{u}$. Тогда радиусы-векторы $\mathbf{x}$ точек плоскости удовлетворяют условию

$$\mathbf{ux}=0,$$

т. е. плоскость определяется уравнением

$$-u^0x^0+u^1x^1+u^2x^2=0. \tag{47.11}$$

С точки зрения изображения эта плоскость ортогональна к вектору $\mathbf{u}'(-u^0, u^1, u^2)$, который представляет собой зеркальное отражение вектора $\mathbf{u}$ относительно плоскости X_1OX_2. Можно сказать и так, что, проводя плоскость, ортогональную к данной прямой *с точки зрения изображения*, и беря ее зеркальное отражение относительно плоскости X_1OX_2 (тоже с точки зрения изображения!), получаем плоскость, ортогональную к данной прямой с точки зрения псевдоевклидовой геометрии. Очевидно, что, когда данная прямая вращается в направлении к изотропному конусу, ортогональная плоскость вращается ей навстречу, причем, когда прямая занимает положение образующей, ортогональная плоскость становится касательной к конусу вдоль этой образующей.

Рассмотрим еще изображения сфер нашего псевдоевклидова пространства, для простоты, с центром в O. Снова (как и для окружностей) рассмотрим случаи вещественного, мнимого и нулевого радиуса.

Вообще уравнение сферы с центром в O, т. е. уравнение геометрического места точек с постоянным расстоянием ρ от O, записывается в виде

$$\mathbf{x}^2 = \rho^2, \text{ т. е. } -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = \rho^2. \tag{47.12}$$

Если $\rho = a$ (радиус вещественный), то получаем:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = a^2,$$

т. е. в нашем *изображении* сфера вещественного радиуса выглядит как однополостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

Если $\rho = ai$ (радиус чисто мнимый), то имеем:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = -a^2,$$

и сфера чисто мнимого радиуса выглядит в изображении как двуполостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

В обоих случаях асимптотическим конусом гиперболоидов служит изотропный конус.

Если же $\rho = 0$, то уравнение (47.12) совпадает с (47.6), так что сфера нулевого радиуса совпадает с изотропным конусом, что ясно, конечно, и из его определения.

§ 48. n-мерное псевдоевклидово пространство индекса 1

Мы уже упоминали, что в n-мерном случае псевдоевклидово пространство индекса 1 будет выглядеть в основном сходно с трехмерным случаем. Действительно, мнимо единичный орт $\mathbf{e}_0$ остается по-прежнему единственным, увеличивается лишь число единичных ортов: вместо $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ мы будем иметь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$. Скалярный квадрат вектора будет теперь выражаться формулой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} \tag{48.1}$$

вместо частного случая этой формулы

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}. \tag{48.2}$$

Нетрудно повторить все построения и выводы § 47 и для n-мерного случая. Так, *изотропный гиперконус* определяется уравнением

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} = 0, \tag{48.3}$$

его внутренняя область определяется условием

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} < 0, \tag{48.4}$$

а внешняя — условием

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} > 0. \tag{48.5}$$

Наименования «внешняя» и «внутренняя» можно оправдать без апелляции к наглядности тем, что внутренняя область *всегда* со-