записывается в виде

$$\mathbf{x}^2 = \rho^2, \text{ т. е. } -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = \rho^2. \tag{47.12}$$

Если $\rho = a$ (радиус вещественный), то получаем:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = a^2,$$

т. е. в нашем *изображении* сфера вещественного радиуса выглядит как однополостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

Если $\rho = ai$ (радиус чисто мнимый), то имеем:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = -a^2,$$

и сфера чисто мнимого радиуса выглядит в изображении как двуполостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

В обоих случаях асимптотическим конусом гиперболоидов служит изотропный конус.

Если же $\rho = 0$, то уравнение (47.12) совпадает с (47.6), так что сфера нулевого радиуса совпадает с изотропным конусом, что ясно, конечно, и из его определения.

§ 48. n-мерное псевдоевклидово пространство индекса 1

Мы уже упоминали, что в n-мерном случае псевдоевклидово пространство индекса 1 будет выглядеть в основном сходно с трехмерным случаем. Действительно, мнимо единичный орт $\mathbf{e}_0$ остается по-прежнему единственным, увеличивается лишь число единичных ортов: вместо $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ мы будем иметь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$. Скалярный квадрат вектора будет теперь выражаться формулой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} \tag{48.1}$$

вместо частного случая этой формулы

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}. \tag{48.2}$$

Нетрудно повторить все построения и выводы § 47 и для n-мерного случая. Так, *изотропный гиперконус* определяется уравнением

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} = 0, \tag{48.3}$$

его внутренняя область определяется условием

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} < 0, \tag{48.4}$$

а внешняя — условием

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} > 0. \tag{48.5}$$

Наименования «внешняя» и «внутренняя» можно оправдать без апелляции к наглядности тем, что внутренняя область *всегда* содержит вместе с двумя какими-нибудь точками A, B и соединяющий их отрезок; внешняя область этим свойством не обладает.

Таким же образом и далее можно воспроизвести почти автоматически все построения § 47. Разница будет лишь в том, что в трехмерном случае мы могли широко использовать наглядное представление, построив в обычном пространстве изображение нашего псевдоевклидова пространства. При этом искажались метрические свойства, но по отношению к аффинным свойствам, в частности, к числу измерений пространства, изображение было точным. Таким образом, трудность, если таковая вообще была, заключалась лишь в непривычном характере метрики. Теперь на эту трудность накладывается и другая — многомерный характер пространства. Тем не менее мы не отказываемся и здесь от использования наглядных представлений по аналогии с трехмерным случаем. Мы будем делать чертежи, апеллирующие, конечно, к трехмерному наглядному представлению, но используемые нами по аналогии для многомерного случая.

Для дальнейшего нам будет особенно важен четырехмерный случай, когда ортонормированный репер имеет орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \tag{48.6}$$

и скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}. \tag{48.7}$$

Трехмерная гиперплоскость R_3, построенная на единичных ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и проходящая через начало O, имеет уравнение

$$x^0 = 0. \tag{48.8}$$

Положение точки на гиперплоскости R_3 определяется, очевидно, тремя координатами x^1, x^2, x^3, причем формула скалярного квадрата (48.3) принимает вид

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}.$$

Ясно, что R_3 несет на себе обычную (трехмерную собственно евклидову) геометрию. Этим же свойством будет обладать и любая трехмерная плоскость, проходящая через вершину изотропного гиперконуса и лежащая в остальном вне его (в соответствии с результатами § 47, если их повторить для четырехмерного случая).

Изучим теперь преобразование одного ортонормированного репера в другой. Орты нового репера обозначим:

$$\mathbf{e}_{0'}, \ \mathbf{e}_{1'}, \ \mathbf{e}_{2'}, \ \mathbf{e}_{3'}. \tag{48.9}$$

Начало O будем считать прежним. Плоскость R_3 для нового репера обозначим R_3'.

Вообще преобразование старых ортов в новые в четырехмерном случае — вещь достаточно громоздкая. Но мы сумеем свести его к двумерному случаю следующим приемом.

Будем называть *тривиальным вращением* репера такое его преобразование, при котором плоскость R_3 остается без изменения и, следовательно, ортогональный к ней орт $\mathbf{e}_0$ или не меняется или меняется на обратный, а орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ испытывают вращение в плоскости R_3. Это вращение, происходящее, таким образом, в обычном трехмерном пространстве (геометрию которого несет на себе R_3), изучается в элементарном курсе аналитической геометрии и никаких затруднений для нас не представляет.

И вот оказывается, что если старый и новый реперы подвергнуть предварительно тривиальному вращению, то переход от одного к другому становится очень простым.

Мы предполагаем, что плоскости R_3 и R'_3 не совпадают; в противном случае переход от старого репера к новому можно было бы совершить просто при помощи тривиального вращения.

Поскольку трехмерные плоскости R_3 и R'_3 в четырехмерном пространстве не совпадают и имеют общую точку, то они пересекаются по двумерной плоскости R_2. Это видно из того, что место их пересечения будет определяться парой независимых однородных линейных уравнений. Итак, плоскость R_2 принадлежит и R_3 и R'_3.

Выполним теперь в трехмерной плоскости R_3 такое вращение ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, чтобы орты $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ поместились на двумерную плоскость R_2. После этого в трехмерной плоскости R'_3 выполним вращение ортов $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ таким образом, чтобы $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ тоже поместились на R_2 и притом совпали с $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (уже помещенными на ней). Возможность всех этих операций не вызывает сомнений, так как они происходят в обычных трехмерных пространствах R_3 и R'_3.

Итак, за счет тривиальных вращений старого и нового реперов можно добиться совпадения ортов:

$$\mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3. \tag{48.10}$$

Теперь нужно рассмотреть оставшуюся часть преобразования. Плоскости ортов $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $(\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'})$ совпадают, следовательно, совпадают и ортогональные к ним псевдоевклидовы плоскости $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1)$ и $(\mathbf{e}_{0'}, \mathbf{e}_{1'})$. Преобразование свелось, таким образом, к преобразованию репера $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ в псевдоевклидовой плоскости, а это преобразование было нами хорошо изучено и имеет вид (45.8):

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{48.11}$$

Мы считали, что начало O у старого и нового реперов общее. Но если это не так, то начала O, O' можно предварительно совместить параллельным сдвигом одного из реперов.

В результате всякое преобразование ортонормированного репера $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *с точностью до тривиальных вращений и параллельного сдвига сводится к преобразованию* (48.10), (48.11).

§ 49. Ортогональные преобразования

Выясним теперь степень произвола в выборе ортонормированного репера в евклидовом пространстве. Уже из способа построения репера ясно, что такой произвол имеется; мы хотим теперь точно определить, как в общем случае преобразуется один ортонормированный репер $\mathfrak{R}$ в другой $\mathfrak{R}'$. Ясно также, что начало O можно передвигать при этом произвольно, так что мы займемся лишь преобразованием ортов. Пусть они преобразуются по формуле

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_i. \tag{49.1}$$

Какова должна быть матрица $A_{i'}^{i}$ для того, чтобы преобразование переводило векторы ортонормированного репера снова в векторы ортонормированного репера?

Мы рассмотрим сначала случаи *комплексного евклидова и собственно евклидова* пространств и притом параллельно; будем помнить лишь, что в первом случае все рассматриваемые численные величины, вообще говоря, комплексные, а во втором — вещественные. В остальном изложение протекает одинаково.

Вслед за преобразованием репера преобразуются ковариантные и контравариантные координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ соответственно по формулам:

$$x_{i'} = A_{i'}^{i}x_i, \tag{49.2}$$

$$x^{i'} = A_{i}^{i'}x^i. \tag{49.3}$$

Но в силу (42.8) и (43.4) в ортонормированных реперах $x_i = x^i$, а следовательно, закон преобразования для них должен быть одинаковым *), и мы получаем:

$$A_{i'}^{i} = A_{i}^{i'}. \tag{49.4}$$

Другими словами, матрица $A_{i'}^{i}$ преобразования ортонормированного репера в ортонормированный репер должна *совпадать со своей транспонированной обратной матрицей* $A_{i}^{i'}$. Транспонирование обратной матрицы сказывается в том, что в (49.4) приравниваются элементы матриц с одинаковыми, но поменявшимися местами индексами. Матрицу со свойством (49.4) мы будем называть *ортогональной*, при

*) Тем самым для ортонормированных реперов исчезает разница между ковариантными и контравариантными индексами; в связи с этим в главе I мы все тензорные индексы писали внизу.