В результате всякое преобразование ортонормированного репера $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *с точностью до тривиальных вращений и параллельного сдвига сводится к преобразованию* (48.10), (48.11).

§ 49. Ортогональные преобразования

Выясним теперь степень произвола в выборе ортонормированного репера в евклидовом пространстве. Уже из способа построения репера ясно, что такой произвол имеется; мы хотим теперь точно определить, как в общем случае преобразуется один ортонормированный репер $\mathfrak{R}$ в другой $\mathfrak{R}'$. Ясно также, что начало O можно передвигать при этом произвольно, так что мы займемся лишь преобразованием ортов. Пусть они преобразуются по формуле

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{49.1}$$

Какова должна быть матрица $A^i_{i'}$ для того, чтобы преобразование переводило векторы ортонормированного репера снова в векторы ортонормированного репера?

Мы рассмотрим сначала случаи *комплексного евклидова и собственно евклидова* пространств и притом параллельно; будем помнить лишь, что в первом случае все рассматриваемые численные величины, вообще говоря, комплексные, а во втором — вещественные. В остальном изложение протекает одинаково.

Вслед за преобразованием репера преобразуются ковариантные и контравариантные координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ соответственно по формулам:

$$x_{i'} = A^i_{i'}x_i, \tag{49.2}$$

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i. \tag{49.3}$$

Но в силу (42.8) и (43.4) в ортонормированных реперах $x_i = x^i$, а следовательно, закон преобразования для них должен быть одинаковым*), и мы получаем:

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i. \tag{49.4}$$

Другими словами, матрица $A^i_{i'}$ преобразования ортонормированного репера в ортонормированный репер должна *совпадать со своей транспонированной обратной матрицей* $A^{i'}_i$. Транспонирование обратной матрицы сказывается в том, что в (49.4) приравниваются элементы матриц с одинаковыми, но поменявшимися местами индексами. Матрицу со свойством (49.4) мы будем называть *ортогональной*, при

*) Тем самым для ортонормированных реперов исчезает разница между ковариантными и контравариантными индексами; в связи с этим в главе I мы все тензорные индексы писали внизу.

этом *вещественной* или *комплексной* в зависимости от характера ее элементов.

Обратно, если соблюдается условие (49.4), то, преобразуя ортонормированный репер при помощи (49.1), мы снова получаем ортонормированный репер. В самом деле, до преобразования мы в ортонормированном репере имеем для любого вектора $x_i = x^i$. Но в силу (49.4) это равенство сохраняется и в преобразованном репере, как видно из (49.2), (49.3):

$$x_{i'} = x^{i'},$$

т. е.

$$g_{i'j'}x^{j'} = x^{i'}.$$

Так как это равенство верно для любого вектора $\mathbf{x}$, то оно представляет собой тождество относительно $x^{j'}$, откуда следует:

$$g_{i'j'} = \begin{cases} 0 & (j' \neq i') \\ 1 & (j' = i') \end{cases}.$$

Тем самым преобразованный репер оказывается тоже ортонормированным.

Итак, для того чтобы матрица $A^i_{i'}$ отвечала переходу от одного ортонормированного репера к другому, необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была ортогональной, т. е. чтобы

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i.$$

Произведение взаимно обратных матриц в любом порядке дает единичную матрицу:

$$A^k_{i'} A^{j'}_k = \delta^{j'}_{i'}, \qquad A^j_{k'} A^{k'}_i = \delta^j_i. \tag{49.5}$$

В нашем случае

$$A^{j'}_k = A^k_{j'}, \qquad A^{k'}_i = A^i_{k'}, \tag{49.6}$$

и мы получаем:

$$\sum_k A^k_{i'} A^k_{j'} = \begin{cases} 0 & (i' \neq j') \\ 1 & (i' = j') \end{cases}, \qquad \sum_{k'} A^j_{k'} A^i_{k'} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}, \tag{49.7}$$

т. е. в ортогональной матрице произведение двух строк дает нуль, если эти строки различны, и единицу, если они совпадают; тем же самым свойством обладают и столбцы. Обратно, если такое свойство имеет место хотя бы только для строк или только для столбцов, то справедливо одно из соотношений (49.7), например, первое. Но в этом соотношении, как можно убедиться, сравнивая его с первым соотношением (49.5), роль обратной матрицы $A^{j'}_k$ играет транспонированная данная матрица, так что мы возвращаемся к условию (49.4), и наша матрица будет ортогональной.

Ортогональные матрицы обладают определителем, равным ± 1, и в соответствии с этим распадаются на два класса.

Действительно, согласно (49.4) матрицы $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$ должны обладать одним и тем же определителем; но в то же время эти матрицы, как матрицы взаимно обратные, должны обладать и обратными (т. е. дающими в произведении единицу) определителями. Таким образом, определитель матрицы $A^i_{i'}$ должен быть обратным самому себе, т. е. равным ± 1.

Преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ при условии

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = 1 \tag{49.8}$$

мы будем называть его *собственным движением*, в частности, при неподвижном начале O — *собственным вращением около* O. Собственные движения репера $\mathfrak{R}$, как можно было бы показать, всегда допускают непрерывный переход от одного из них к другому за счет непрерывного изменения репера $\mathfrak{R}'$ при постоянном $\mathfrak{R}$. В частности, любое из них может быть осуществлено непрерывным переходом от тождественного преобразования (которое, конечно, входит в число собственных движений). Геометрически это значит, что если в результате собственного движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$, то $\mathfrak{R}'$ можно получить непрерывным изменением $\mathfrak{R}$. При этом здесь и в дальнейшем подразумевается, конечно, что в процессе изменения репер остается ортонормированным.

Преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ при условии

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = -1 \tag{49.9}$$

мы будем называть его *несобственным движением*. Несобственные движения легко получить из собственных, накладывая на каждое из них зеркальное отражение репера относительно одной из его гиперплоскостей: например, оставляя начало O и все орты $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ без изменения, а орт $\mathbf{e}_1$ заменяя через $-\mathbf{e}_1$. Очевидно, это элементарное преобразование, наложенное на любое собственное движение, приводит к изменению знака $\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|$, т. е. к превращению этого движения в несобственное.

Между любыми двумя несобственными движениями возможен непрерывный переход, что вытекает из аналогичного свойства собственных движений. Но, конечно, непрерывный переход от собственного к несобственному движению невозможен, так как $\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|$ не может непрерывным образом перейти от значения $+1$ к значению -1.

Если выбрать какой-нибудь репер $\mathfrak{R}_0$ и отнести к одному классу все реперы $\mathfrak{R}'$, получающиеся из него собственными движениями, а к другому — все реперы $\mathfrak{R}''$, получающиеся из него несобственными движениями, то все реперы распадаются на два класса, причем в пределах каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, а от одного класса к другому непрерывный переход невозможен. Полученное разбиение на реперы данной и противоположной ориентаций аналогично рассмотренному в вещественном аффинном пространстве. Разница только в том, что сейчас нас интересуют не любые аффинные, а лишь ортонормированные реперы; это приводит и в *комплексном* случае к той же картине (в то время как комплексные *аффинные* реперы на два класса не распадаются).

§ 50. Псевдоортогональные преобразования

Рассмотрим теперь случай, когда (49.1) дает преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ *в псевдоевклидовом пространстве индекса* k. Мы будем считать, что k принимает значения $1, 2, \ldots, n-1$. Случай $k=n$ исключаем, как приводящий по существу к собственно евклидову пространству (см. начало § 44); в этом случае $A^i_{i'}$ — тоже вещественная ортогональная матрица.

Пусть, как обычно, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (соответственно $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}$) — мнимоединичные орты; остальные орты — единичные. Пусть индексы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ пробегают у нас значения $1, 2, \ldots, k$, а индексы $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ — значения $k+1, \ldots, n$.

Тогда разложение

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i$$

можно записать в детализированном виде, отличая единичные и мнимоединичные орты:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{\alpha'} &= A^{\alpha}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha} + A^{\lambda}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\lambda}, \\ \mathbf{e}_{\lambda'} &= A^{\alpha}_{\lambda'}\mathbf{e}_{\alpha} + A^{\lambda}_{\lambda'}\mathbf{e}_{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{50.1}$$

В правых частях по α и λ происходит, конечно, суммирование. Вся матрица преобразования состоит, таким образом, из четырех матриц:

$$\|A^i_{i'}\| = \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{A^{\alpha}_{\alpha'}}}^{k}\ \overbrace{\phantom{A^{\lambda}_{\alpha'}}}^{n-k} \\ \left\|\begin{array}{c:c} A^{\alpha}_{\alpha'} & A^{\lambda}_{\alpha'} \\ \hdashline A^{\alpha}_{\lambda'} & A^{\lambda}_{\lambda'} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\, k \\ \}\, n-k \end{array}. \tag{50.2}$$

При помощи этой же матрицы преобразуются, как мы знаем, ковариантные координаты x_i произвольного вектора $\mathbf{x}$:

$$\left.\begin{aligned} x_{\alpha'} &= A^{\alpha}_{\alpha'}x_{\alpha} + A^{\lambda}_{\alpha'}x_{\lambda}, \\ x_{\lambda'} &= A^{\alpha}_{\lambda'}x_{\alpha} + A^{\lambda}_{\lambda'}x_{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{50.3}$$